Tableau récapitulatif : épreuve d'entraînement novembre 2022

	Catégories						
Problèmes (titres et épreuves)	3	4	5	6	7	8	9
1- Les dés (I) (23e RMT II, 01)	x	x					
2- C'est le printemps (22e RMT II, 04)	x	x	x				
3- Cinq amis à la pizzéria (28e RMT I, 03)	x	x	x				
4- Qu'il fait bon lire (20e RMT I, 06)		x	x				
5- La frise (21e RMT II, 06)		x	x	x			
6- Le robot Robert (26e RMT II, 06)		x	x	x			
7- Les horloges (26e RMT I, 08)			x	x			
8- Balance à plateaux (27e RMT II, 07)			x	x	x		
9- Les anniversaires (25e RMT II, 12)				x	x	x	
10- À la cave (23e RMT II, 10)				x	x	x	
11- Pièces magnétiques (24e RMT I, 13)				x	x	x	x
12- Héritage à partager (22e RMT II, 12)					x	x	
13- Le chien et le renard (20e RMT F, 13)					x	x	x
14- Les carrés d'Alex et de François (17e RMT, II, 16)					x	x	x
15- L'enclos des animaux (28e RMT I, 15)						x	x
16- Un apprenti géomètre (28e RMT I, 19)							x
17- Amis supporters (20e RMT II, 16)							x
18- Les pots de chocolat (26e RMT I, 19)							x

1. LES DÉS (I) (Cat. 3, 4)

Cette photo montre quatre dés.
On voit seulement quelques points noirs de ces dés sur la photo.
Mais on ne peut pas voir toutes les faces, certains points sont donc cachés.

Combien y a-t-il de points noirs qui ne sont pas visibles sur la photo ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver ce nombre.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

- Trouver le nombre de points noirs qui ne sont pas visibles sur une photo montrant quatre dés empilés.

Analyse de la tâche

- Observer les quatre dés sur la photo. Pour chacun d'eux identifier les faces visibles et leurs points et imaginer les autres faces non visibles, en déduire par exclusion les points inscrits sur chacune.
- Par exemple, pour le premier dé en bas à droite, puisque les faces visibles montrent 1, 3 et 5 points, déduire que les points sur les trois faces non visibles sont 2, 4 et 6.
- Pour le décompte des points on peut procéder de plusieurs façons :

  - par exemple, calculer pour chaque dé la somme des points des faces non visibles et ensuite additionner les résultats obtenus (11 + 19+ 12 + 10) ;

  - ou bien trouver la somme des points sur un dé (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21), la multiplier par quatre (84), enlever ensuite la somme des points sur les faces visibles (32).
- Conclure que le nombre total des points non visibles est 52.

Attribution des points

4 Réponse correcte (52) avec des explications claires

3 Réponse correcte, avec des explications incomplètes ou imprécises

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse erronée due à une erreur de calcul ou dans la détermination des points sur une ou deux faces cachées, avec une explication claire du déroulement de la recherche

1 Réponse erronée due à plusieurs erreurs de calcul

ou début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Luxembourg

2. C'EST LE PRINTEMPS ! (Cat. 3, 4, 5)

Anne a acheté 40 bulbes de tulipe à planter dans les pots de son balcon : deux grands pots et trois petits. Elle commence à mettre le même nombre de bulbes dans les cinq pots et ensuite, dans chacun des grands, elle en met 10 en plus.

Combien de bulbes de tulipe Anne a-t-elle plantés dans chaque pot ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

- Décomposer 40 en somme de cinq termes, avec deux termes égaux entre eux et trois autres qui valent chacun 10 de plus : $40 = 5 \times \ldots + 20$

Analyse de la tâche

- Procéder par essais non organisés, permettant d'arriver à la solution.

Ou bien :

- Comprendre que les grands pots contiennent le même nombre de bulbes et que les petits pots contiennent un même nombre de bulbes différent du précédent.
- Comprendre que dans les grands pots il y a au moins 11 bulbes, puisqu'il y a 10 bulbes de plus que le nombre de bulbes contenus dans les petits pots.
- Organiser une recherche systématique. Commencer à mettre dans les deux grands pots 11 bulbes. Cela fait donc 22 bulbes. Soustraire des 40 bulbes ces 22 bulbes. Il en reste 18 pour les petits pots, ce qui peut se diviser pour 3, et conclure qu'on peut mettre 6 bulbes dans chaque petit pot. Cette solution n'est cependant pas valable, parce qu'entre 6 et 11 il n'y a pas la différence de 10.
- Essayer alors avec 12, puis avec 13, mais s'apercevoir que dans les deux cas le nombre des bulbes qui restent n'est pas divisible par 3.
- Essayer avec 14 et trouver qu'il reste 12 bulbes, qui est divisible par 3. Donc dans chaque petit pot, on peut mettre 4 bulbes. La solution est valable parce que la différence entre le nombre de bulbes contenus dans les deux types de pots est 10.
- Continuer cette recherche pour être sûr qu'il n'y a pas d'autres solutions, ou bien s'arrêter ici en observant explicitement qu'en augmentant le nombre de bulbes, la différence sera toujours supérieure à 10.

Ou bien :

- Comprendre qu'en enlevant 10 bulbes de chaque grand pot, il reste $40 – 20 = 20$ bulbes à répartir en 5 pots. En déduire qu'il y a 4 bulbes dans chaque petit pot et 14 dans chaque grand pot.

Attribution des points

4 Réponse correcte (14 bulbes dans les grands pots et 4 bulbes dans les petits pots) avec une procédure explicitée ou avec les détails des essais qui montrent l'organisation d'une recherche systématique assurant l'unicité de la solution

3 Réponse correcte, mais avec une procédure peu claire ou insuffisamment explicitée ou seulement une vérification

2 Procédure correcte, mais une erreur de calcul ou une réponse correcte sans explication

1 Début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : 9.F.1 I gettoni

3. CINQ AMIS À LA PIZZÉRIA (Cat. 3, 4, 5)

Alice, Bruno, Camille, Dino et Elsa vont dans une pizzéria pour manger chacun une pizza. Ils commandent quatre types de pizza différents : napolitaine, margherita, capricciosa, aux champignons.

- Dino et Alice n'aiment pas les champignons ;
- Bruno et Elsa ont commandé le même type de pizza ;
- Camille a commandé une capricciosa ;
- Dino n'a pas commandé une margherita.

Quel type de pizza ont commandé Alice, Bruno, Dino et Elsa ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Associer un type de pizza parmi quatre à chaque personne d'un groupe de cinq en respectant quatre contraintes dont deux sont formulées par une négation.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le nombre d'amis est différent du nombre de types de pizzas.
- Comprendre que s'il y a quatre types de pizza et qu'il y a cinq amis, personne n'a choisi le même type de pizza que Bruno et Elsa et que les trois autres amis ont choisi chacun un type de pizza différent.
- La troisième information permet d'attribuer la capricciosa à Camille, ainsi il reste trois types de pizza, champignons, napolitaine et margherita, à attribuer à quatre personnes. La première information exclut d'attribuer la pizza aux champignons à Dino et Alice, ce qui signifie que Bruno et Alice ont commandé une pizza aux champignons.
- Il ne reste plus alors qu'à attribuer les pizzas napolitaine et margherita. La dernière information conduit à conclure que Dino a commandé la napolitaine et Alice la margherita.

Ou

- Partir de la dernière information et déduire que Dino, puisqu'il n'a pas commandé une margherita, ni une pizza aux champignons (première information), ni une capricciosa (troisième information), a commandé une napolitaine.
- Alice n'a pas commandé une pizza aux champignons, ni une capricciosa, ni une napolitaine. Elle a donc commandé une margherita.
- En déduire que Bruno et Elsa ont tous deux commandé une pizza aux champignons.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Alice a commandé une margherita, Bruno et Elsa ont commandé une pizza aux champignons, Dino une napolitaine) avec description des déductions effectuées pour arriver à la réponse (sous forme de texte ou au moyen d'un schéma associant à chacun les types de pizza possibles et en justifiant les associations qui sont successivement écartées...)

3 Réponse correcte avec explication peu claire de la procédure

Ou réponse correcte avec seulement la vérification

2 Réponse correcte sans explication

Ou réponse correcte pour Bruno et Elsa, mais inversion entre les types de pizza de Dino et Alice

1 Absence de réponse mais attribution correcte à un ou deux des amis, autre que Camille.

Ou une déduction correcte faite à partir des informations de l'énoncé (par exemple Bruno et Elsa n'ont pas pris une capricciosa parce que…)

0 Incompréhension du problème

Ou attribution correcte uniquement pour Camille.

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Rozzano

4. QU'IL FAIT BON LIRE ! (Cat. 4, 5)

Fabio a reçu en cadeau un livre de 174 pages et décide d'en organiser la lecture de la façon suivante:

- il ne lira pas le dimanche ;
- tous les autres jours, sauf le mercredi, il lira le même nombre de pages ;
- il lira 15 pages de plus le mercredi, car il a congé l'après-midi.

En faisant comme cela, Fabio arrivera à lire tout le livre en deux semaines entières.

Combien de pages doit-il lire le mercredi et combien les autres jours pour finir son livre en deux semaines ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la solution.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : nombres jusqu'à 200, les quatre opérations

Analyse de la tâche

- Savoir que dans deux semaines il y a 14 jours.
- Se rendre compte que dans ces deux semaines il y a deux dimanches et deux mercredi (et qu'il lira 12 jours, dont 2 avec 15 pages en plus).
- Partir des 174 pages, enlever les 30 pages (2 x 15) qu'il lit en plus les mercredis et trouver le nombre de pages qu'il lit régulièrement en 12 jours (144).
- Diviser 144 par 12 et trouver que Fabio doit lire 12 pages chaque jour.
- Ajouter les 15 pages qu'il lit en plus le mercredi pour trouver les pages qu'il lit ce jour-là (12 + 15 = 27).

Ou: procéder par essais en faisant des hypothèses sur le nombre de pages lues chaque jour, différent du mercredi. Par exemple supposer que ce soient 10 et trouver qu'on aurait [(10 x 5) +25] x 2 =150 pages lues en deux semaines: trop peu. Essayer avec 11 et trouver que ce n'est pas encore convenable ; trouver au contraire qu'avec 12 on obtient exactement 174 = [(12 x 5) + 25] x 2).

Ou : considérer que si chaque jour des deux semaines, différent du dimanche, Fabio avait lu le même nombre de pages, cela aurait fait 14 pages (174 : 12) avec un reste de 6 pages. Procéder ensuite en enlevant chaque fois 1 au nombre des pages lues chaque jour (on augmente ainsi chaque fois le reste de 12 pages). On trouve alors que, si on suppose 12 pages lues chaque jour, on obtient un reste de 30 pages (les 15 en plus des deux mercredis).

Attribution des points

4 Réponse correcte (27 pages le mercredi et 12 pages les autres jours sauf les dimanches), avec calculs et explications

3 Réponse correcte sans détail des calculs ou explications confuses

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse erronée due à une démarche correcte avec une seule erreur de calcul

1 Raisonnement qui ne tient pas compte d'une des conditions (le dimanche ou le mercredi ou le nombre de jours de lecture)
ou repérage des 12 jours de lecture effective ou des 30 pages lues le mercredi

0 Incompréhension du problème

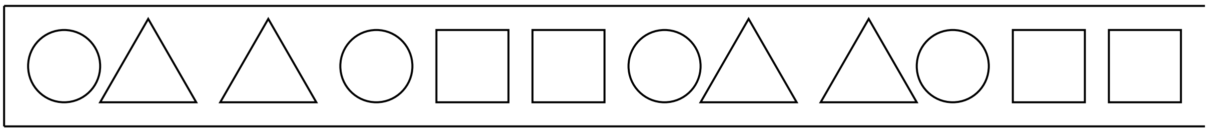
Niveaux : 4, 5

Origine : Ticino

5. LA FRISE (Cat. 4, 5, 6)

Dans la salle de bain de Philippe, il y a une longue frise de petits carreaux décoratifs, avec des cercles, des triangles et des carrés.

Les figures se succèdent de la manière suivante : un cercle, puis deux triangles, puis un cercle, puis deux carrés, et on recommence avec un cercle, deux triangles, un cercle, deux carrés etc., comme on le voit sur ce dessin.



Philippe compte toutes les figures qui sont sur la frise. Il commence par un cercle, deux triangles (déjà trois figures) puis continue jusqu'à la fin de la frise. Il compte en tout 100 figures.

Quelle est la forme de la dernière figure comptée par Philippe ?

Combien de cercles, combien de triangles et combien de carrés y a-t-il sur toute la frise ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : calcul avec des nombres entiers naturels, division avec reste

Analyse de la tâche

- Observer la partie de la frise qui est dessinée et comprendre comment elle est organisée.
- Identifier le module qui se répète (un cercle, deux triangles, un cercle, deux carrés) et calculer qu'il est formé de 6 figures.
- Chercher le nombre de modules contenus dans les 100 figures, par exemple en divisant 100 par 6. Il y a 16 modules et il reste encore 4 figures, soit : un cercle, deux triangles, un cercle.
- Conclure que la dernière figure comptée par Philippe est un cercle.
- Déduire du nombre de modules et des figures restantes que :
  - les cercles et les triangles sont chacun au nombre de 34 (2 dans chaque module complet et 2 dans le dernier module incomplet) ;
  - les carrés sont au nombre de 32 (2 dans chaque module complet et 0 dans le dernier incomplet).

Ou bien :

- Dessiner la frise en s'arrêtant à un point stratégique avec un nombre entier de modules complets (par exemples à 30 figures, donc 5 modules) et compter combien de figures de chaque sorte on a déjà dessiné.
- Multiplier, dans ce cas, par 3, puis ajouter les 10 figures qui manquent (un module complet plus 4 figures). Une autre possibilité est que les élèves dessinent toute la bande, mais il s'agit évidemment d'une procédure plus longue et peu « fiable ».

Attribution des points

4 Les quatre réponses correctes (cercle ; 34 cercles ; 34 triangles ; 32 carrés) avec des explications claires

3 Les quatre réponses correctes avec explications peu claires
ou trois réponses correctes et une erronée, avec explications claires et cohérentes

2 Les quatre réponses correctes sans explications
ou deux réponses correctes et deux erronée, avec explications

1 Une seule réponse correcte et trois erronées
ou début de raisonnement correct (par exemple découverte du module de 6)

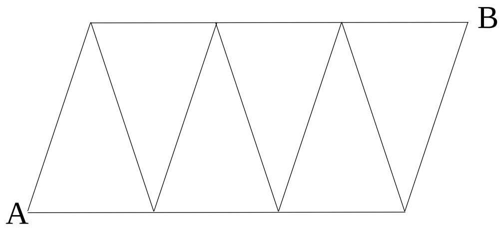
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

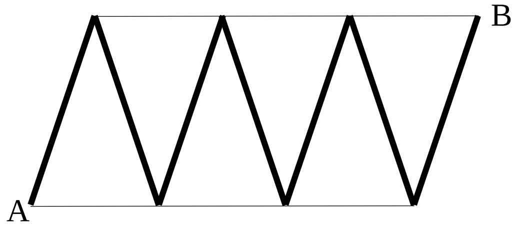
6. LE ROBOT ROBERT (Cat. 4, 5, 6)

Le robot Robert se déplace sur les lignes d'un parcours représenté ici, en faisant des pas qui sont tous de la même longueur.

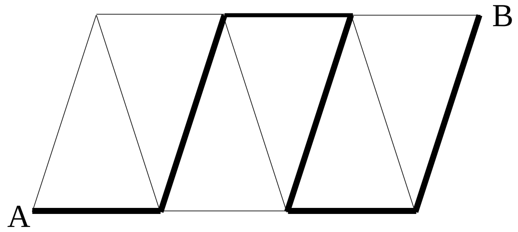


Pour se déplacer de A vers B il peut suivre différents chemins.

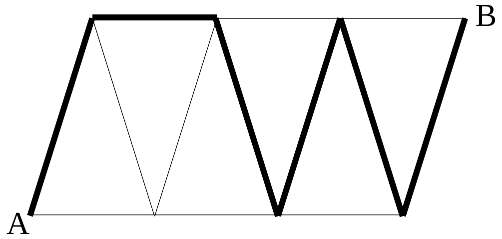
Lorsqu'il suit ce chemin, il fait 56 pas :



En revanche, il fait 36 pas quand il suit cet autre chemin :



Combien de pas fait le robot Robert quand il suit ce chemin-là ?



Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Sur un réseau composé de deux types de segments, des courts et des longs, trouver la longueur d'un chemin composé d'un segment court et 5 segments longs, connaissant la longueur d'un chemin de 7 segments longs (56 pas) et celle d'un chemin de 3 segments courts et 3 segments longs (36 pas).

Analyse de la tâche

- Comprendre que le robot Robert fait toujours un nombre entier de pas pour parcourir un segment de la grille et que pour parcourir des segments égaux, il comptera le même nombre de pas, puisque ses pas ont toujours la même longueur.
- Déduire du premier chemin, composé de 7 segments longs, que chaque segment vaut 8 pas (56 : 7).
- Observer le second chemin et se rendre compte qu'il est formé de 3 segments longs et de 3 segments courts.
- Trouver que pour parcourir les trois segments longs du second chemin, Robert fera 24 pas (8 × 3) et que pour parcourir les segments courts il en fera 12 (36 – 24) ; par conséquent chaque segment court mesure 4 pas (12 : 3).
- Conclure que pour parcourir le troisième chemin, composé de 5 segments longs et 1 segment court, Robert fera 44 pas (8 × 5 + 1 × 4).

Ou bien,

- observer que le second chemin est formé de 3 segments courts et de 3 segments longs et en déduire que pour parcourir 1 segment long et 1 segment court Robert fait 12 pas (36 : 3).

- Procéder par essais pour trouver combien de pas mesure chacun des deux segments (6-6, 7-5, 8-4, 9-3, 10-2, 11-1) et découvrir que l'unique possibilité compatible avec le premier chemin est 8 pas pour le segment long et 4 pas pour le segment court.
- Conclure que Robert fait 44 pas pour le troisième chemin.

Attribution des points

4 Réponse correcte (44 pas ou 44) avec des explications claires (montrant la détermination de 8 pas, puis de 4 pas et le total 8 × 5 + 4, ou avec les nombres de pas de chaque segment notés sur les dessins)

3 Réponse correcte (44 pas ou 44) avec des explications peu claires (par exemple sans dire comment ont été trouvés les nombres de pas 8 et 4)

2 Réponse correcte (44 pas ou 44) sans explications

ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul

1 Début de raisonnement correct

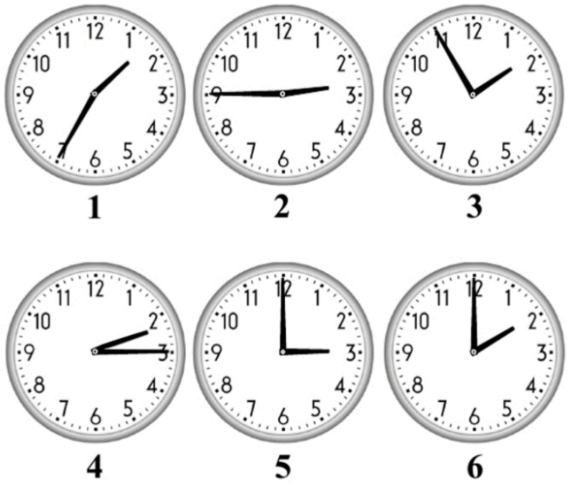
0 Incompréhension du problème ou mesure avec une règle des longueurs des segments pour compter les nombres de pas

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Groupe Calcul et Proportionnalité (variante du problème *Le robot Arthur*, 20.II.2)

7. LES HORLOGES (Cat. 5, 6)

Dans l'atelier de l'horloger de Transalpie, il y a ces six horloges.
L'une de celles-ci indique l'heure exacte.
Une autre avance de 20 minutes, une autre retarde de 20 minutes, les trois autres sont arrêtées.



Quelle horloge indique l'heure exacte ?
Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver, parmi les images de 6 horloges, dont l'une est à l'heure, l'une avance de 20 minutes, l'une retarde de 20 minutes et les trois autres sont arrêtées, celle qui est à l'heure.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour répondre à la question il faut lire les heures des six horloges : 1:35, 1:55, 2:00, 2:15, 2:45, 3:00.
- Choisir une horloge, faire l'hypothèse que c'est elle qui est à l'heure et vérifier si les conditions données pour les autres sont respectées. Si ce choix n'est pas juste, recommencer avec une autre horloge.

Ou, procéder par essais en choisissant trois horloges et vérifier si les écarts entre les trois sont respectés.

Ou, comprendre que si une horloge retarde de 20 minutes et un autre avance de 20 minutes, l'écart entre les deux sera de 40 minutes et que celle qui indique l'heure exacte sera comprise entre les deux. Chercher donc les deux horloges dont les heures diffèrent de 40 minutes. On peut soit effectuer les calculs (1 h 35 min + 40 min = 1 h 75 correspondant à 2 h 15 min), soit en se déplaçant dans le temps, en avant ou en arrière sur chaque horloge. Trouver ainsi qu'il s'agit des horloges indiquant 1:35 et 2:15 et que celle de l'heure exacte est celle qui indique 1:55 (horloge n°3, 20 minutes en plus de 1:35 et 20 minutes en moins de 2:15)

Ou, chercher de manière systématique les couples de deux horloges qui diffèrent de 20 minutes en écartant toutes celles qui n'ont pas cette différence. On écarte ainsi les horloges indiquant 2:00, 2:45, 3,00. Les trois autres sont celles à prendre en considération, celle donnant l'heure exacte se situe entre les deux autres dans l'ordre croissant des temps.

Attribution des points

4 Réponse correcte (l'horloge n°3) avec la description de la procédure suivie (les calculs, les indications sur la figure des aiguilles déplacées, les explications par des mots …)

3 Réponse correcte avec explications incomplètes (par exemple on ne mentionne que l'écart entre l'horloge qui indique 20 minutes de plus que l'‘heure exacte)

2 Réponse correcte : le numéro de l'horloge à l'heure sans aucune explication de la démarche suivie

1 Calculs qui montrent la recherche d'écarts de 20 ou 40 minutes sans être arrivé à trouver les horloges impliquées
ou au moins une hypothèse sur une horloge choisie comme “à l'heure juste” et la vérification que les autres conditions ne sont pas respectées

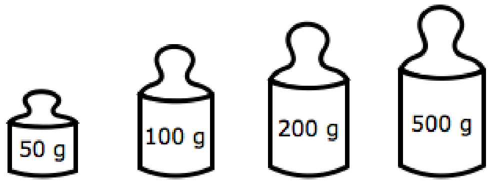
0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6

Origine : Franche-Comté (Variante de 04.F.04 3, 4, 5 Chez l'horloger)

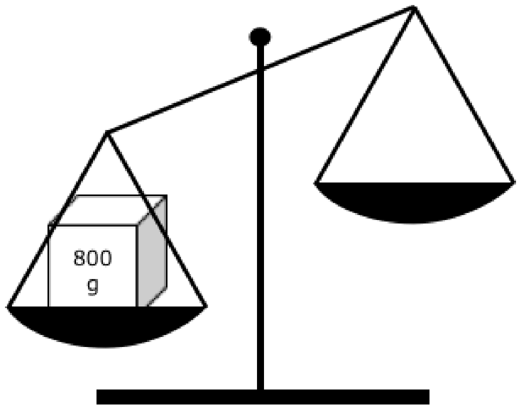
8. BALANCE À PLATEAUX (Cat. 5, 6, 7)

Anne cherche à mettre en équilibre les plateaux d'une balance.
Elle dispose d'un poids de 50 grammes, un de 100 grammes, un de 200 grammes et un de 500 grammes

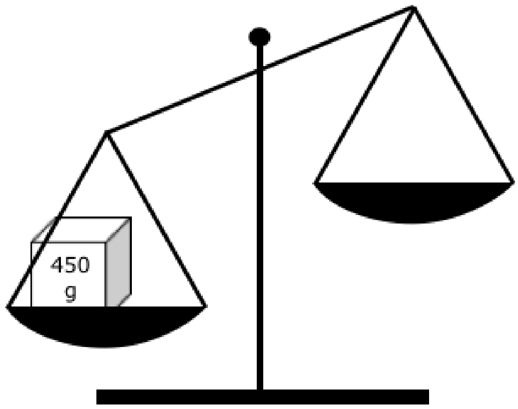


De quelles manières Anne pourrait mettre en équilibre les plateaux de la balance de gauche où elle a déjà placé un paquet de 800 g et la balance de droite où elle a déjà placé un paquet de 450 g ?

(dans chacun des deux cas vous pouvez utiliser un, deux, trois ou les quatre poids à disposition)



1er cas



2e cas

Pour chacun des deux cas, indiquez toutes les manières possibles d'équilibrer la balance.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Compléter deux égalités dont un terme est déjà donné : 800, 450, en utilisant à chaque fois un ou plusieurs de quatre autres nombres donnés : 50, 100, 200, 500.

Analyse de la tâche

- Savoir qu'une balance à plateaux est en équilibre lorsque la masse présente sur un plateau est égale à celle présente sur l'autre plateau.
- Comprendre les données du problème : Anne dispose de 4 poids pour chaque balance, et pour chaque cas elle doit choisir parmi eux lesquels utiliser pour équilibrer la masse présente sur l'autre plateau ; chaque poids ne pouvant être utilisé pour chaque cas qu'une seule fois.
- Comprendre qu'on peut mettre la balance en équilibre soit en ajoutant des poids sur le plateau vide, soit en ajoutant des poids sur les deux plateaux.
- Procéder cas par cas, pour élaborer les égalités possibles.

  Une seule possibilité pour le 1er cas : **800 = 500 + 200 + 100**

  Trois possibilités pour le 2ème cas : **450 + 50 = 500** ou **450 + 100 = 500 + 50** ou **450 + 200 = 500 + 100 + 50**

Attribution des points

4 Réponse correcte (les 4 solutions possibles données chacune par une égalité ou un dessin ou une description écrite) sans proposition erronée (par exemple erreurs en utilisant deux fois le même poids pour un cas, ou avec utilisation correcte des poids donnés mais avec erreur de calcul)

3 3 solutions possibles clairement décrites et sans solution erronée
ou les 4 solutions correctes avec une seule autre solution, mais erronée

2 les 4 solutions correctes avec deux autres solutions erronées
ou 3 solutions correctes, avec une autre solution erronée
ou 2 solutions correctes, sans solutions erronées

1 Les 4 solutions correctes, mais avec plus de deux autres propositions erronées

ou 2 ou 3 solutions correctes, avec deux solutions erronées

ou présence seulement du nombre de solutions correctes, 4, sans détails des égalités ni dessin des équilibres,

0 Incompréhension du problème ou une ou deux solutions correctes, avec plus de deux solutions erronées

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Udine

9. LES ANNIVERSAIRES (Cat. 6, 7, 8)

Martine et son père Marc fêtent leur anniversaire le même jour. Cette année, en 2017, leurs âges s'écrivent avec les deux mêmes chiffres : Martine a 37 ans et Marc 73 ans.

Y a-t-il déjà eu d'autres anniversaires où leurs deux âges s'écrivaient avec les mêmes chiffres ? Et y en aura-t-il encore après 2017 ?

Donnez les deux âges de Martine et Marc pour chacun de ces autres anniversaires et expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver tous les couples possibles de nombres à deux chiffres dans lequel le chiffre des dizaines de l'un correspond au chiffre des unités de l'autre et vice versa, donnant la même différence.

Analyse de la tâche

- L'appropriation du problème nécessite la compréhension que chaque année les âges changent et augmentent d'une unité, l'an prochain ils auront 38 et 74 ans, l'année suivante 39 et 75 ans et ainsi de suite ; que les âges avancent au même rythme dans le temps et que l'écart reste constant ; la différence des âges 73 – 37 = 36 reste toujours la même.
- On pourrait alors partir de 0 et 36 ou 10 et 46.
- On peut construire deux suites en relation du type :
  - Martine 0 3 4 **15 26 37 48 59** 70...81
  - Marc 36 39 40 **51 62 73 84 95**...106...117
- et ainsi trouver toutes les solutions.
- Il faut savoir limiter les deux suites : 64 et 100 (et au-delà) ne conviennent pas car ils ne remplissent pas la condition « nombres à deux chiffres » ; de même 09 et 45 (et en deçà).
- On peut aussi remarquer que, pour trouver tous les âges qui nous intéressent, on doit à chaque fois ajouter 11 à chaque nombre du couple (15, 51) : (26, 62) (37, 73) (48, 84) (59, 95).
- Ou alors commencer par la différence entre 73 et 37 = 36 ; chercher ensuite les nombres dont la différence entre les chiffres des unités est 6 (par exemple 11 – 5 = 6; 12 – 6 = 6 .; 13 – 7 = 6 ; 14 – 8 = 6 ; 15 – 9 = 6), puis en déduire que les chiffres des dizaines peuvent être obtenus par l'échange avec ceux des unités. Par exemple, de 14 – 8 = 6, voir que 84 et 48 conviennent.
- Ou exclure tous les âges de Martine plus petits que 10 ; essayer d'inverser les chiffres à partir de 12 et comprendre que la différence augmente toujours de 9, jusqu'à arriver à 15 et 51, où la différence est vraiment 36. Comprendre qu'au-delà du 15 la différence augmente. Passer à la dizaine suivante, en partant de 23 et trouver 26 et 62, dont la différence est 36. On comprend ici qu'il y a une régularité ; nous arrivons ainsi aux âges indiqués dans le texte, 37 et 73 ; les autres âges qui conviennent seront 48 et 84 et 59 et 95, parce qu'à chaque fois les âges augmentent de 11 (une dizaine plus une unité).
- Ou encore, en s'appuyant sur les caractéristiques de la numération décimale de position, poser que l'âge de Marc est de 10 a + b et que l'âge de Martine est alors de 10 b + a (a et b étant des nombres entiers entre 0 et 9, avec a > b (car Marc est plus âgé).
- On doit donc avoir 10 a + b = 10 b + a + 36, d'où 9 (a – b) = 36 et donc a – b = 4. Le cas b = 0 est exclu car on doit trouver des nombre à deux chiffres. On trouve donc b = 1 et a = 5 (15 ans et 51 ans), b = 2 et a = 6 (26 ans et 62 ans), b = 3 et a = 7 (exemple donné dans l'énoncé), b = 4 et a = 8 (48 ans et 84 ans), b = 5 et a = 9 (59 ans et 95 ans).

Attribution des points

4 Réponse correcte ("oui" avant 2017 : 15-51; 26-62; "oui" après 2017 : 48-84; 59-95, avec une explication détaillée (par exemple, des essais ordonnés en âges croissants)

3 Réponse correcte (les quatre couples) avec des explications incomplètes (par ex. seulement quelques essais) ou trois couples trouvés (à l'exclusion de celui de l'énoncé) avec des explications détaillées

2 Trois couples trouvés (à l'exclusion de celui de l'énoncé) avec des explications incomplètes
ou deux couples trouvés avec des explications détaillées
ou réponse correcte sans explications

1 Début de recherche organisée
ou trois couples trouvés sans explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

10. À LA CAVE (Cat. 6, 7, 8)

Albert vient de mettre tout son vin en bouteilles. Il doit maintenant placer les bouteilles dans des caisses pour les transporter.

Il a deux sortes de caisses, des grandes et des petites. Pour ranger toutes ses bouteilles, il calcule qu'il lui faudrait exactement 36 grandes caisses. Mais il ne dispose que de 12 grandes caisses.

Il recommence ses calculs et se rend compte que toutes ses bouteilles rempliraient ses 12 grandes caisses et 45 petites caisses. Mais il ne dispose que de 42 petites caisses.

Il remplit toutes les caisses dont il dispose et il lui reste 24 bouteilles en dehors des caisses.

Combien Albert a-t-il rempli de bouteilles avec tout son vin ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer une quantité initiale de bouteilles de vin en sachant qu'elles peuvent être contenues dans 36 grandes caisses ou dans 12 grandes et 45 petites, ou encore dans 12 grandes et 42 petites avec un reste de 24 bouteilles.

Analyse de la tâche

- Comprendre, à la lecture de l'énoncé, qu'il y a des équivalences : « 36 grandes caisses équivalent à 12 grandes caisses et 45 petites » et « 12 grandes caisses et 45 petites équivalent à 12 grandes caisses et 42 petites plus 24 bouteilles ». Par déduction, comprendre que 24 grandes caisses équivalent à 45 petites et que 3 petites caisses équivalent à 24 bouteilles.
- Passer dans le domaine de l'arithmétique, en traduisant ces équivalences par des égalités avec des nombres et des opérations.
- On peut procéder de différentes manières.

  Par exemple, se rendre compte que les 24 bouteilles restantes en dehors des caisses iraient dans les trois petites caisses manquantes (45–42). Comprendre ainsi que dans une petite caisse entrent exactement 8 bouteilles et que le nombre de bouteilles qu'Albert devrait mettre dans les 45 petites caisses est 360 (= 45 × 8). Comprendre que 360 est le même nombre de bouteilles qu'Albert aurait dû ranger dans 24 (= 36–12) grandes caisses et en déduire que chacune des grandes caisses contient 15 (= 360 : 24) bouteilles.
- Conclure qu'Albert a rempli 540 bouteilles (= 15 × 36).

Attribution des points

4 Réponse correcte (540 bouteilles) avec une explication claire et calculs détaillés

3 Réponse correcte (540 bouteilles) avec des explications peu claires ou seulement une vérification

2 Procédure correcte mais réponse erronée à cause d'une erreur de calcul ou réponse correcte sans explication

1 Début de raisonnement correct

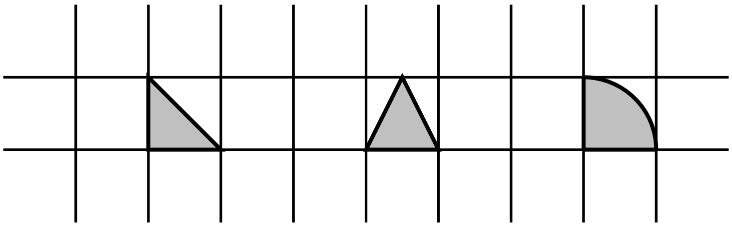
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

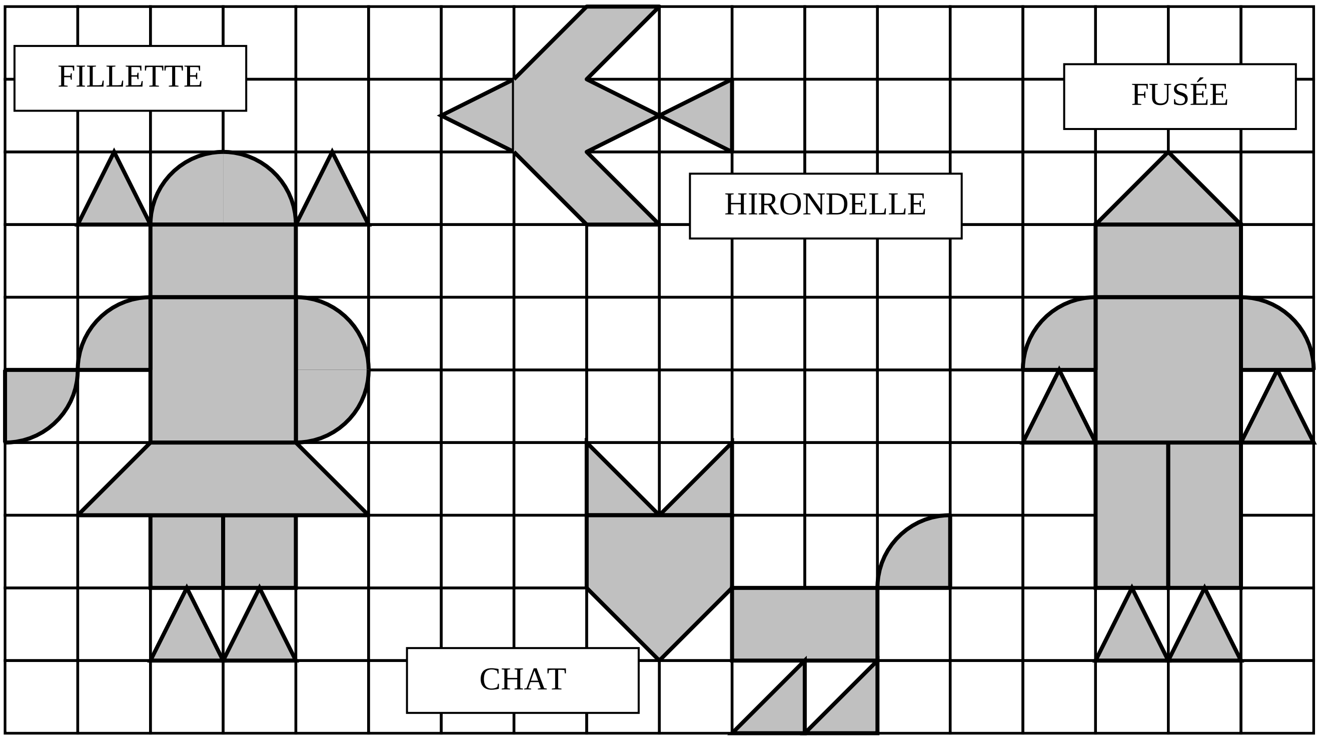
Origine : Siena

11. PIÈCES MAGNÉTIQUES (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Pour jouer sur un panneau métallique sur lequel est dessiné un quadrillage, ont été utilisées uniquement des pièces magnétiques de ces trois types :



Ces trois types de formes ont été utilisés pour obtenir les figures que vous voyez reproduites ci-dessous : une FILLETTE, une HIRONDELLE, un CHAT et une FUSÉE.



Ont été dépensés :

- 18,20 € pour l'acquisition des pièces magnétiques qui composent la FILLETTE,
- 7,80 € pour les pièces magnétiques qui composent le CHAT,
- 15,00 € pour celles de la FUSÉE.

Combien a été dépensé pour les pièces magnétiques de l'HIRONDELLE ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

À partir de trois compositions différentes obtenues en utilisant un certain nombre de pièces de trois formes différentes et en connaissant le prix en euro de chacune des compositions, déterminer le coût d'une quatrième composition réalisée en utilisant seulement deux des trois types de pièces (ce qui revient à résoudre un système de trois équations linéaires à trois inconnues).

Analyse de la tâche

- Observer les trois pièces en distinguant les deux types de triangles : un triangle rectangle isocèle, moitié d'un carré du quadrillage ; un triangle isocèle avec une base coïncidant avec un côté du quadrillage ; un secteur circulaire correspondant à un quart de cercle avec un rayon égal au côté du quadrillage.
- Comprendre qu'il est nécessaire d'examiner les figures pour déterminer combien de pièces de chaque type sont utilisées. Remarquer qu'il est nécessaire d'utiliser deux pièces « triangle rectangle isocèle » pour obtenir les éléments carrés des figures. Reconnaître ainsi, par exemple, que la tête de la fillette est formée avec deux pièces en triangle isocèle (les tresses), deux pièces d'¼ de cercle, et quatre pièces en forme de triangle rectangle isocèle (le rectangle de deux carrés).

- Décrire les images en fonction du nombre et du type de pièces utilisées :
  - FILLETTE : 22 pièces « triangle rectangle isocèle », 6 pièces « quart de disque » et 4 pièces « triangle isocèle »
  - CHAT : 14 pièces « triangle rectangle isocèle », 1 pièce « quart de disque »
  - FUSÉE : 22 pièces « triangle rectangle isocèle », 2 pièces « quart de disque » et 4 pièces « triangle isocèle »
  - HIRONDELLE : 6 pièces « triangle rectangle isocèle » et 3 pièces « triangle isocèle ».
- Se rendre compte que la différence de prix des compositions dépend du nombre et du type de pièces utilisées dans chacune, et que par conséquent il est nécessaire de passer à une comparaison entre les figures. Comprendre que la figure de la fillette diffère de celle de la fusée de 4 pièces « quart de disque » et trouver ensuite que le coût d'une pièce de ce type est de 0,80 € [(18,20 - 15,00): 4]. De l'information sur la figure du chat, tirer en conséquence que le coût d'une pièce “triangle rectangle isocèle” est de 0,50 € [(7,80 - 0,80): 14].
- Pour trouver le coût pour l'hirondelle, il faut encore déterminer le prix d'une pièce « triangle isocèle ». Cette dernière valeur peut être déduite des informations sur la fillette, ou celles de la fusée, par la différence entre le coût total et celui des pièces, « triangle rectangle isocèle » et « quart de cercle », dont on a déjà trouvé le coût. Le résultat est qu'une pièce « triangle isocèle » coûte 0,60 € (par exemple, en se basant sur la fillette, le calcul est donné par: [18,20 - (11 + 4,80): 4] = 0,60).
- Déduire enfin que le coût des pièces pour l'hirondelle est de 4,80 € [6 × 0,50 + 3 × 0,60].

Ou remarquer que le chat n'est constitué que de deux sortes de pièces, 14 pièces « triangle rectangle isocèle » et 1 seul « quart de disque ». Le coût étant de 7,80 €, imaginer que chaque pièce « triangle rectangle isocèle » coûte 0,50 € et que l'autre coûte 0,80 € (lien fort entre 7 et 14). Vérifier ensuite que, à partir de ces données, un même prix est trouvé pour la pièce « triangle isocèle » pour la fillette et la fusée : 0,60 €. Calculer ensuite le coût de l'hirondelle : 4,80 €.

Ou, considérant que le triangle rectangle est la moitié d'un carré; et que la figure du chat est composé de 7 carrés, émettre l'hypothèse qu'un carré coûte 1 euro et que le quart de disque coûte 0,80 euro. Vérifier l'hypothèse sur la figure de la fillette composée de 11 carrés, 6 quarts de disque et 4 triangles isocèles. De (18,20 - 1580) : 4 = 0,60 on tire le coût d'un triangle isocèle. Une dernière vérification sur la figure de la fusée confirmera l'hypothèse et permet de calculer le prix de la figure de l'hirondelle.

Ou résoudre le système d'équations :

(1) $6q + 22tr + 4ti = 18{,}20$

(2) $1q + 14\ tr = 7{,}80$

(3) $2q + 22tr + 4ti = 15$

qui a pour solution q = 0,80€, tr = 0,50€ et ti = 0,60€. Calculer ensuite le prix des pièces de l'hirondelle qui est de 4,80 €.

Attribution des points

4 Réponse correcte (4,80 €) avec une explication complète (inventaire des pièces de chaque figure, description des étapes, avec calculs successifs des valeurs des différentes pièces)

3 Réponse correcte sans explication

ou, procédure correcte mais avec une erreur de calcul soit dans le comptage des pièces, soit dans l'exécution d'une opération avec des nombres décimaux

2 Procédure correcte mais avec plus d'une erreur de calcul dans le comptage des pièces et/ou dans l'exécution d'une opération avec des nombres décimaux

ou, le nombre de pièces de chaque type est déterminé correctement pour chacune des figures et la procédure de calcul est bien commencée, mais pas terminée

1 Début de raisonnement correct (par exemple, détermination correcte du nombre de pièces de chaque type pour au moins deux des quatre figures)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8. 9, 10

Origine : Siena

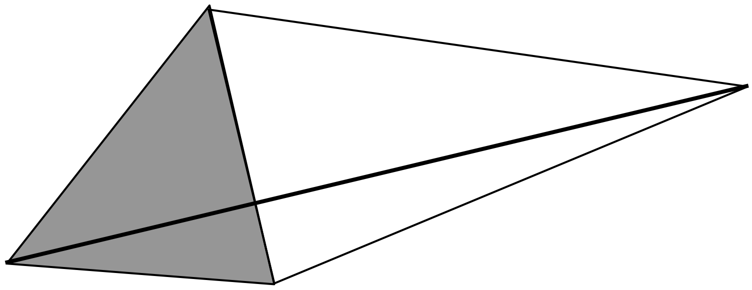
12. HÉRITAGE À PARTAGER (Cat. 7, 8)

Un agriculteur laisse en héritage à son fils et à sa fille un champ d'une valeur de 30 000 euros et des économies d'un montant de 21 000 euros.

La figure ci-dessous représente le champ : un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et partagé par l'une d'elles en deux triangles, l'un en gris, l'autre en blanc.

Un tiers de l'autre diagonale est situé dans la partie grise.

La fille choisit la partie grise, le fils prend le triangle blanc.



Les deux héritiers doivent se partager l'ensemble de l'héritage en deux parts de même valeur.

Comment doivent-ils se répartir les 21 000 euros ?

Expliquez comment vous avez trouvé et montrez les calculs que vous avez faits.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Partager équitablement un héritage composé de 21 000 euros et d'un champ d'une valeur de 30 000 euros divisé en deux parties triangulaires de même de base et de hauteurs l'une double de l'autre.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut d'abord comparer les aires des deux triangles.
- Remarquer que les triangles ont une base commune. En déduire que leurs aires sont proportionnelles au rapport des mesures des hauteurs correspondantes situées sur la diagonale du quadrilatère dans les deux triangles, l'une étant le double de l'autre.
- Calculer les valeurs des deux champs : 10 000 euros pour le triangle gris de la fille et 20 000 euros pour le triangle blanc du fils.
- Comprendre que la fille doit d'abord recevoir 10 000 euros de la somme héritée , puis qu'il faut partager les 11 000 euros restants en deux parts égales.

Ou bien, comprendre que claque héritier doit recevoir la moitié de l'héritage, soit 25 500 euros.

- Conclure que la fille recevra 15 500 euros et le fils 5 500 euros.

Attribution des points

4 La répartition correcte (15 500 euros pour la fille et 5 500 euros pour le fils) avec une explication claire montrant le rapport des aires des deux triangles

3 La répartition correcte avec une explication peu claire

2 La répartition correcte sans explication
ou bien la répartition correcte de la valeur du champ avec explication, mais sans le partage des 21 000 euros

1 Début de recherche, ou répartition correcte de la valeur du champ et répartition erronée des 21 000 euros (par ex. selon le rapport 1 à 2) en obtenant 7 000 et 14 000).

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8

Origine : Franche-Comté

13. LE CHIEN ET LE RENARD (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le chien Toby poursuit son ami Red le renard dans les bois. Il parcourt 85 mètres en 5 secondes tandis que Red parcourt 104 mètres en 8 secondes. Quand la poursuite a commencé, la distance entre les deux était de 320 mètres.

Combien de temps faudra-t-il à Toby pour rattraper Red ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaines de connaissances

- Arithmétique : opérations dans **N**
- Mesures : distance, temps et vitesse
- Algèbre: équation du premier degré

Analyse de la tâche

- Pour les élèves qui ne maîtrisent pas le concept de vitesse, la procédure doit suivre l'écoulement du temps, seconde par seconde, après avoir transformé les données « 85 mètres en 5 secondes » et « 104 mètres en 8 secondes », respectivement en 17 et 13 mètres en une seconde, (ou 40 secondes par 40 secondes, ppmc de 8 et 5). On peut alors élaborer une progression comparée des animaux et de leur écart. Par exemple :

temps (s)	0	1	2	…	10	20	…	40	…	80
distance chien (m)	0	17	34	…	170	340	…	680	…	1360
distance renard (m)	0	13	26	…	130	260	…	520	…	1040
rattrapage (m)	0	4	8	…	40	80	…	160	…	320
écart (m)	320	316	312		280	200	…	160	…	0

Ou, se rendre compte, après avoir transformé les vitesses en m/s, que le chien rattrape 4 mètres par seconde et qu'il lui faudra 80 secondes (320 : 4) pour rattraper le renard, ou 1 minute et 20 secondes

Ou, algébriquement, les distances parcourues en x secondes par le chien ($17\,x$) et le renard ($13\,x$) en mètres conduisent à l'équation $320 = 17\,x - 13\,x$ et à sa solution $x = 80$ (en secondes) ou 1 minute et 20 secondes (les trois distances peuvent être représentés graphiquement).

(Pour le physicien, la relation entre vitesse, distance et temps sous la forme $d = vt$, permet de transcrire directement la différence des distances parcourues par le chien et le renard par l'équation

$(85/5)t - (104/8)t = 320$)

Attribution des points

4 Réponse correcte (80 s ou 1 min 20 s) avec des explications détaillées

3 Réponse correcte avec des explications peu claires

2 Réponse correcte sans aucune explication

1 Début de raisonnement correct (comparaison des deux vitesses soit par calcul soit par le début d'un tableau ...)

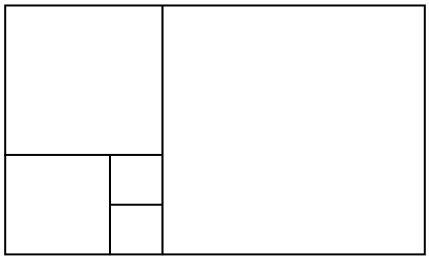
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine: Riva del Garda

14. LES CARRÉS D’ALEX ET FRANÇOIS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Alex et François considèrent la figure suivante représentant un grand rectangle formé de 5 carrés.



Alex affirme que s’il connaît le périmètre du rectangle, il peut calculer son aire et il donne un exemple avec un périmètre de 130 cm.

François prétend qu’il peut calculer le périmètre du rectangle à partir de son aire et il donne un exemple avec une aire de 1 440 cm^2.

Quelle est l’aire calculée par Alex et quel est le périmètre obtenu par François ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle et carré.
- Grandeurs et mesures : mesures de périmètres et aires.

Analyse de la tâche

- Observer que le rectangle est formé de 5 carrés : deux petits carrés dont les côtés peuvent être pris comme unité de longueur, un carré de côté double, un carré de côté triple et un grand carré de côté 5 unités.
- Remarquer que le rectangle a pour périmètre $2 \times (5 + 8) = 26$ (en unités) et qu’il contient $2 + 4 + 9 + 25 = 40$ carrés unité.
- Puisque le périmètre d’Alex vaut 130 cm, il a pris $130/26 = 5$ (en cm) pour côté d’un carré unité qui a donc une aire de 25 (en cm^2) et dans l’exemple d’Alex, le rectangle a une aire de $25 \times 40 = 1000$ (en cm^2).
- Puisque l’aire de François vaut 1440 (en cm^2), il a pris dans son exemple $1440/40 = 36$(en cm^2) pour aire d’un carré unité et 6 cm comme unité de longueur. Le périmètre du rectangle qu’il doit donner est donc $26 \times 6 = 156$ cm.

Attribution des points

4 Les deux réponses (1000 cm^2 et 156 cm) justifiées

3 Les deux réponses correctes sans explications ou explications confuses

2 Une réponse correcte et l’autre manquante ou erronée à cause d’une erreur de calcul

1 Début de raisonnement cohérent

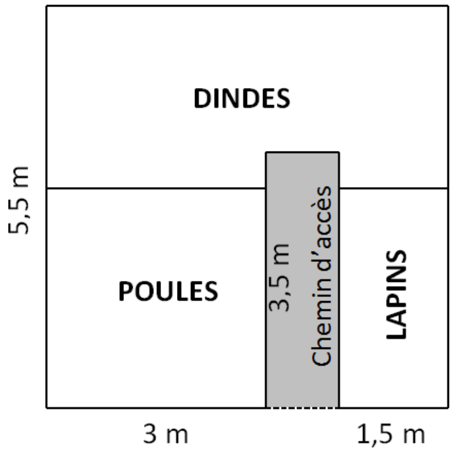
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Ticino

15. L'ENCLOS DES ANIMAUX (Cat. 8, 9, 10)

Carlos a construit pour ses animaux un enclos carré comme le montre le dessin.



Il a partagé l'enclos en quatre zones :

- Une zone de forme carrée pour les poules ;
- Une zone de forme rectangulaire pour les lapins ;
- Une zone pour les dindes ;
- Et un chemin d'accès aux trois zones de 3,5 m de longueur.

Carlos se rend compte que le chemin d'accès est un peu étroit. Il décide donc d'agrandir tout l'enclos. Dans le nouvel enclos, la largeur du chemin d'accès est 1,80 m et les dimensions de chaque zone ont été augmentées dans les mêmes proportions.

Quelle est l'aire de la nouvelle zone pour les dindes ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver l'aire d'une figure agrandie à partir des dimensions indiquées sur la figure d'origine, le rapport d'agrandissement étant déterminé à partir de la donnée d'une des dimensions de l'agrandissement.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nouvel enclos est un agrandissement de l'enclos représenté sur le dessin : l'enclos et chaque zone auront la même forme mais pas les mêmes dimensions.
- Comprendre que les seules informations numériques dont on dispose sur l'agrandissement sont la nouvelle largeur du chemin d'accès (1,80 m) et sa largeur initiale qui peut être déterminée à partir des autres données.
- Savoir interpréter la phrase « en augmentant les dimensions de chaque zone dans les mêmes proportions » : le rapport entre les dimensions correspondantes est constant ou toutes les dimensions sont multipliées par un même nombre.
- Déterminer le coefficient d'agrandissement ou le rapport constant (1,8) à partir de la largeur initiale et de la nouvelle largeur du chemin d'accès. (Il est également possible de considérer que chaque dimension doit être augmentée de 80 %).
- Comprendre que toutes les dimensions initiales des quatre zones peuvent être déterminées à partir des informations portées sur le dessin.
- Considérer la zone réservée aux dindes comme étant la réunion d'un grand rectangle et de deux petits rectangles ou comme étant un rectangle amputé d'un petit rectangle. Déterminer les dimensions initiales de cette figure (2 m x 5,5 m + 0,5 m x 3 m + 0,5 m x 1,5 m ou 2,5 m x 5,5 m – 1 m x 0,5 m). Utiliser les proportions ou le coefficient d'agrandissement pour calculer les dimensions de la figure agrandie (3,6 m x 9,9 m + 0,9 m x 5,4 m + 0,9 m x 2,7 m ou 4,5 m x 9,9 m – 1,8 m x 0,9 m). Calculer l'aire de la figure agrandie : 42,93 m^2 (35,64 m^2 + 4,86 m^2 + 2,43 m^2 ou 44,55 m^2 – 1,62 m^2).

Ou

- Considérer l'aire de la zone réservée aux dindes comme étant la différence entre l'aire de l'enclos et de la somme des 3 autres zones qui sont un carré et deux rectangles. Déterminer la largeur initiale du chemin d'accès, les autres dimensions étant connues. Calculer les dimensions de l'enclos et de ces zones agrandies (9,9 m x 9,9 m ; 5,4 m x 5,4 m ; 1,8 m x 6,3 m ; 2,7 m x 5,4 m) puis leurs aires (98,01 m^2 ; 29,16 m^2 ; 11,34 m^2 ; 14,58 m^2). En déduire l'aire de la zone réservée aux dindes 42,93 m^2 [98,01 m^2 - (29,16 m^2 + 11,34 m^2 + 14,58 m^2)].

Ou

- Après avoir déterminé l'aire de la zone réservée aux dindes dans l'enclos initial : 13,25 m^2 [11 m^2 + 1,5 m^2 + 0,75 m^2 ou 13,75 m^2 – 0,5 m^2 ou 30,25 m^2 – (9 m^2 +3,5 m^2 + 4,5 m^2)], appliquer la propriété « dans un agrandissement, si les dimensions sont multipliées par k, les aires le sont par k^2 ». L'aire de la zone réservée aux dindes dans l'enclos agrandie est 42,93 m^2 (13,25 m^2 x $1{,}8^2$).

Attribution des points

4 Réponse correcte (42,93 m^2) avec détermination des dimensions, calcul des aires et énonciation de la proportionnalité des dimensions ou de la propriété relative au rapport d'aires dans un agrandissement

3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires (telles que présence des calculs mais propriété utilisée d'un agrandissement non explicitée ou propriété explicitée, mais absence de certains calculs)

2 Réponse correcte sans explication ni justification

Ou calculs corrects de toutes les dimensions utiles au calcul de l'aire réservée aux dindes dans l'enclos agrandi (avec présence ou absence de calculs d'aires, exacts ou erronés)

Ou réponse erronée consécutive à une ou plusieurs erreurs de calcul mais raisonnement correct et bien explicité

1 Début de recherche correct (par exemple : utilisation de la proportionnalité pour déterminer au moins trois des dimensions sur l'agrandissement)

0 Incompréhension du problème

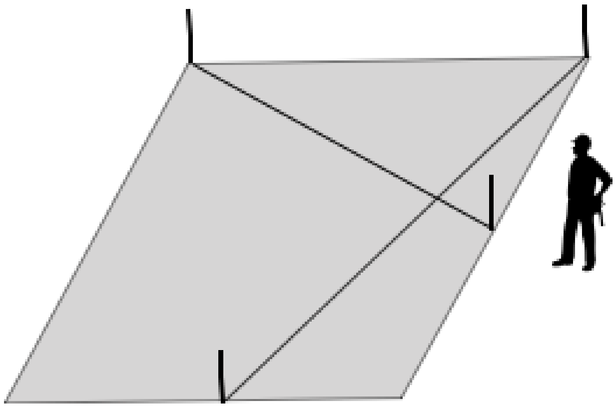
Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Puglia

16. UN APPRENTI GÉOMÈTRE (Cat. 9, 10)

Un géomètre a planté quatre piquets, deux aux sommets d'un terrain carré et les deux autres au milieu de deux de ses cotés. Il a attaché ensuite des fils aux pieds de ces piquets et les a tendus comme l'indique la figure ci-dessous.

Ce géomètre se tourne ensuite vers son apprenti et lui demande s'il peut sans mesurer dire quelles sont les mesures des angles formés par les deux fils qui se croisent.



Répondez à la question du géomètre et donnez vos justifications.

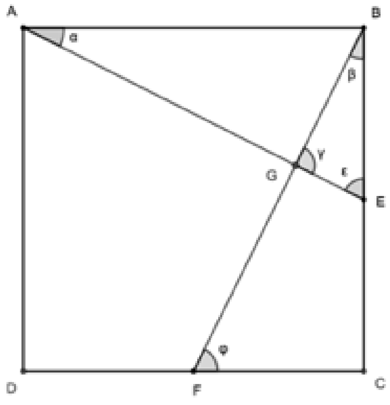
ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver les mesures des angles formés par deux segments qui joignent le sommet d'un carré au milieu de l'un de ses côtés.

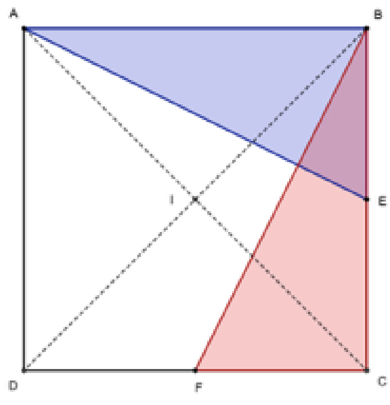
Analyse de la tâche

- Réaliser que la figure de l'énoncé est en perspective et qu'il est préférable de commencer par faire une figure en construisant un carré et en nommant les points et les angles de la figure.
- En utilisant à la figure ci-contre, considérer les triangles ABE et BCF respectivement rectangles en B et C et dont les hypoténuses sont formées par les deux fils qui se croisent ;
  - chacun de ces deux triangles étant rectangle, préciser que $\alpha + \varepsilon = 90°$ et $\beta + \gamma = 90°$;
  - établir que les deux triangles sont égaux car ils ont un angle de même meure compris entre deux côtés égaux ;
  - en déduire les égalités suivantes $\beta = \alpha$ et $\gamma = \varepsilon$. (propriétés des triangles égaux)
  - en déduire que dans le triangle BGE, β et ε sont complémentaires et qu'ainsi le troisième angle γ du triangle mesure 90°.
  - en conclure que les deux droites sont perpendiculaires et donc que les 4 angles mesurent 90°.



Ou

- Considérer la rotation de centre I (point d'intersection des diagonales du terrain) et d'angle 90° (sens des aiguilles d'une montre) et en utilisant une figure analogue à celle proposée ci-contre
  - établir que cette rotation transforme A en B (propriétés des diagonales du carré) ;
  - établir qu'elle transforme E en F (propriétés des axes de symétrie du carré ou conservation des milieux par la rotation) ;
  - en déduire que la droite (BF) est l'image de la droite (AE) par cette rotation ;
  - en conclure que ces deux droites sont perpendiculaires.



Attribution des points

4 La réponse correcte (les angles formés par les deux fils qui se croisent sont des angles droits) avec une justification correcte et complète (avec les diverses étapes de la justification)

3 La réponse est correcte mais une étape de la justification n'est pas justifiée (un passage est pris pour acquis)

2 La réponse correcte mais deux étapes de la justification ne sont pas justifiées

1 Suite de constats très peu ou pas justifiés mais qui témoignent que les élèves ont compris quelques étapes du raisonnement

0 Incompréhension du problème ou réponse correcte sans aucune trace de justification

Niveaux : 9, 10

Origine : GTGP (Groupe de travail Géométrie plane)

17. AMIS SUPPORTERS (Cat. 9, 10)

Deux amis, Jean et Pierre sont passionnés de football, mais supportent deux équipes différentes. Ils confrontent les résultats obtenus par leurs équipes dans le dernier championnat.

Jean affirme : « *Si mon équipe avait gagné quatre matchs de plus et la tienne quatre matchs de moins, mon équipe en aurait gagné le double de la tienne* ».

Pierre ajoute : « *Oui, c'est juste. Mais il est aussi vrai que si ton équipe avait gagné quatre matchs de moins et la mienne quatre matchs de plus, nos deux équipes auraient gagné le même nombre de matchs* ».

Dans ce dernier championnat, combien de matchs l'équipe de Jean et l'équipe de Pierre ont-elles gagné ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

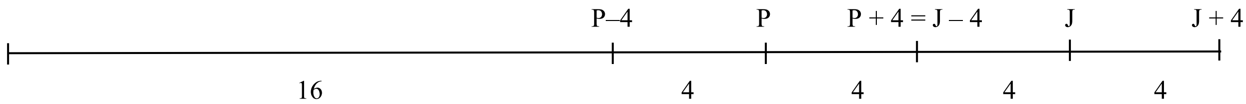
- Arithmétique : nombres pairs et impairs, opérations avec les entiers naturels
- Algèbre : introduction de lettres pour représenter des relations entre nombres, équations et systèmes linéaires

Analyse de la tâche

- Comprendre, d'après l'affirmation de Pierre, que l'équipe de Jean a gagné 8 matchs de plus que celle de Pierre.
- Comprendre, d'après l'affirmation de Jean, que l'équipe de Pierre a gagné au moins 4 matchs et que l'équipe de Jean a gagné un nombre pair de matchs (parce que ce nombre augmenté de 4 est pair étant le double d'un autre nombre). En déduire de même que le nombre de matchs perdus par l'équipe de Pierre est pair (parce qu'additionné à 8 il donne un nombre pair).
- Procéder par essais organisées, éventuellement en se servant d'un tableau. Supposer que le nombre des matchs gagnés par l'équipe de Pierre est 6, 8, 10, 12…, considérer par conséquent que le nombre des matchs gagnés par l'équipe de Jean est 14, 16, 18… et vérifier si les conditions de l'énoncé sont respectées. Conclure qu'avec 20 matchs gagnés par l'équipe de Pierre et 28 matchs gagnés par l'équipe de Jean, les deux affirmations sont vérifiées.

Ou bien : en langage algébrique, introduire des lettres pour représenter le nombre des matchs gagnés par les deux équipes. Par exemple, P pour l'équipe de Pierre et J pour l'équipe de Jean. Exprimer la seconde affirmation en écrivant J = P + 8. Chercher ensuite la valeur de P qui rend J + 4, c'est-à-dire P + 12, égal à 2 (P – 4). En déduire que 12 = P – 8, d'où P = 20. Conclure que J = 28.

Ou bien : construire un schéma du type suivant, considérant que J + 4 est le double de P – 4 et qu'il y a 16 matchs de différence entre J + 4 et P – 4, du fait que J – 4 = P + 4 :



En déduire que J + 4 = 2 × 16 = 32, d'où J = 28 et P = 20.

Ou bien, au niveau 10, noter par exemple par a le nombre de matchs gagnés par l'équipe de Pierre et par b le nombre de matchs gagnés par l'équipe de Jean et traduire les conditions de l'énoncé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} b+4=2(a-4) \\ b-4=a+4 \end{cases}$$

En soustrayant les deux équations membre à membre, on a : 8 = a –12, d'où a = 20 et b = 28.

Attribution des points

4 Réponse correcte (20 matchs pour l'équipe de Pierre et 28 pour l'équipe de Jean) avec des explications qui montrent clairement la procédure suivie, de manière arithmétique ou algébrique

3 Réponse correcte avec des explications incomplètes ou avec seulement une vérification

2 Réponse claire, mais erronée à cause d'une erreur de calcul
ou mise en équation correcte avec une erreur dans la résolution du système,
ou réponse correcte sans explication

1 Réponse erronée qui ne tient compte que d'une affirmation sur les deux,
ou début de recherche correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena

18. LES POTS DE CHOCOLAT (Cat. 9, 10)

Dans une fabrique de boisson au chocolat, deux machines, A et B, remplissent de chocolat fondu des pots tous identiques de forme cylindrique d'une hauteur de 40 cm.

La machine A verse le chocolat au rythme de 1 centimètre par seconde dans des pots qui contiennent déjà 10 cm de lait.

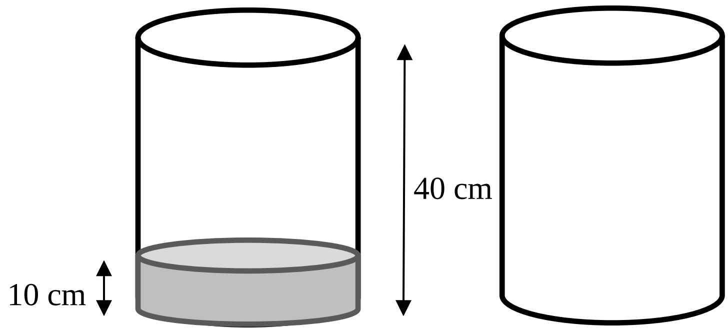
La machine B verse le chocolat dans des pots vides selon un rythme qui s'accélère à chaque seconde.

1 mm durant la première seconde

2 mm durant le deuxième seconde

3 mm durant le troisième seconde

… et ainsi de suite, en augmentant de 1 mm à chaque seconde.



machine A machine B

Si on place deux pots au même moment dans les machines respectives, le niveau du chocolat du pot de la machine B rejoindra-t-il celui de l'autre pot avant que celui-ci ne soit plein ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Confronter les niveaux de liquide dans deux récipients cylindriques connaissant le rythme de remplissage de chacun

Analyse de la tâche

- Calculer le temps nécessaire pour que le niveau du pot de la machine A arrive à une hauteur de 40 cm : il reste donc à remplir une hauteur de 30 cm et, en remplissant 1 cm par seconde, il faudra 30 secondes pour finir de remplir le pot A.
- Calculer la hauteur du niveau de chocolat dans le pot de la machine B après 30 secondes : (1 + 2 + 3 + 4 + … + 30) mm, en effectuant l'addition à la main ou en reconnaissant qu'il s'agit de (31 × 30) / 2 = 465 en mm ou 46,5 cm.

  Conclure qu'en 30 secondes le niveau de chocolat du pot de la machine B dépasserait le niveau de celui de la machine A et que, par conséquent, il rejoindrait le niveau du pot A avant que celui-ci ne soit plein.

Ou, calculer les hauteurs des niveaux de chocolat dans les deux pots en fonction du temps, en s'aidant éventuellement d'un tableau de ce genre :

temps (sec)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	…	25	26	27	28	29	30
hauteur A (cm)	10	11	12	13	14	15	16	17	18	…	35	36	37	38	39	40
hauteur B (cm)	0	0,1	0,3	0,6	1	1,5	2,1	2,8	3,6	…	32,5	35,1	37,8	40,6	43,5	46,5

- Conclure que le niveau de chocolat dans le pot de la machine B rejoindra celui du pot de la machine A après environ 27 secondes, c'est-à-dire avant que celui-ci ne soit plein.

Ou : par voie algébriques et/ou graphique déterminer soit le moment où le niveau de 400 mm est atteint dans le pot B soit le moment où les deux pots sont au même niveau :

il faut alors, dans le premier cas la (durée : *t*, en secondes) trouver la formule 1 + 2 + 3 +….+ t = (t+1) × t/2 et résoudre l'équation (t+1) × t/2 = 400. dont la solution est $= \frac{-1 \pm \sqrt{1+3200}}{2} \cong 27{,}8$, puis conclure que le niveau de chocolat dans le pot de la machine B arrivera à la hauteur 40 cm (400 mm) avant celui de la machine A (en 30 secondes) ; ou, dans le second cas, exprimer les deux fonctions f(t) = 10 + t ;

$g(t) = (t+1) \times t/20$ et résoudre l'équation $f(t) = g(t)$; $10 + t = (t+1) \times t/20$ dont la racine positive est égale à 26,53 s.

Attribution des points

4 Réponse correcte : oui, le niveau de chocolat dans le pot de la machine B rejoindra celui du pot de la machine A avant que les pots soient pleins, avec explications claires et complètes (calcul du temps nécessaire pour arriver à 40 cm dans le pot B ou calcul de la hauteur de chocolat en fonction du temps) ou comparaison graphique ou calcul de l'instant où les deux pots auront la même hauteur de chocolat).

3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires (la somme 1 + 2 + 3 + 4 + … + 30 n'est pas explicitée ou quelques étapes de l'élaboration de l'équation sont omises)

2 Procédure correcte mais avec erreur (de calcul ou de l'élaboration de l'équation ou de sa résolution)
ou réponse erronée due à une erreur de calcul, mais avec une procédure correcte et bien expliquée

1 Réponse correcte sans explication
ou début de raisonnement correct (le nombre de secondes nécessaire pour remplir le pot de la machine A ou traces de la somme 1 + 2 + 3 + 4 … ou seulement le début d'un tableau pour B)
ou réponse erronée due à deux erreurs de calcul ou plus, avec procédure correcte

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : GTFN (Groupe de travail Fonctions)