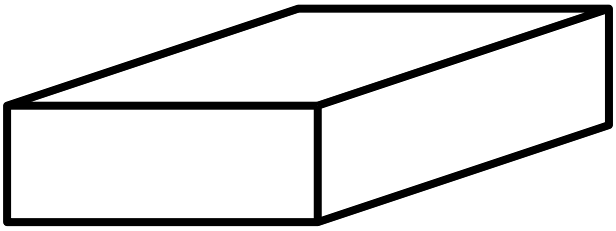
1. LA PESÉE DES PAQUETS (Cat. 3, 4)

Le Père Noël prépare des paquets rouges, des paquets bleus et des paquets verts.
Chaque paquet rouge pèse 3 kilos.
Chaque paquet bleu pèse 5 kilos.
Chaque paquet vert pèse 8 kilos.
Le Père Noël met plusieurs paquets dans sa hotte. Il veut que les paquets pèsent, ensemble, exactement 25 kilos.

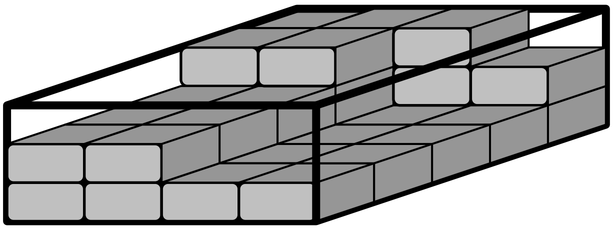
Quels types de paquets peut-il mettre ensemble dans sa hotte ?
Notez toutes vos solutions et expliquez comment vous les avez trouvées.

2. GOURMANDISES (Cat. 3, 4)

Maman a acheté une boîte de chocolats et l’a posée sur la table.
Voici la boîte, pleine mais encore fermée, avec son couvercle :



Le lendemain matin, quand elle ouvre la boîte, elle découvre que ses enfants ont déjà mangé une partie des chocolats.
Voici ce qui reste :



Combien de chocolats y avait-il dans la boîte quand elle était pleine ?

Combien de chocolats les enfants ont-ils déjà mangés ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaines de connaissances

- Géométrie dans l’espace : représentation en perspective d’un empilement de pavés
- Arithmétique : comptage, addition, soustraction, multiplication

Analyse de la tâche

- Lire la représentation en perspective (comme une photo) : comprendre que tous les chocolats présents dans la boîte ne sont pas visibles sur la représentation, percevoir les couches, les empilements, …
- Comprendre que la boîte pleine comporte 3 étages de 4 rangées de 5 chocolats ou de 5 rangées de 4 chocolats, c’est-à-dire $5 \times 4 \times 3 = 60$.
- Déterminer le nombre de chocolats qui restent dans la boîte (par exemple couche par couche : $20 + 12 + 5 = 37$), effectuer la différence ($60 – 37 = 23$) pour trouver les chocolats déjà mangés.

Ou : déterminer visuellement le nombre de chocolats manquants, parties par parties, et les additionner (par exemple 6 sur la partie supérieure « à gauche », plus 2 couches de 8 chocolats chacune. plus le chocolat en haut à droite : $6 + 16 + 1 = 23$)

Ou : résolution à l’aide de matériel (cubes), ou autres représentations, …

Attribution des points

4 Réponses exactes (60 et 23) avec explications claires et détaillées

3 Réponses exactes avec explications peu claires ou incomplètes
ou une seule « petite » erreur de comptage (60 et 22 ou 60 et 24) avec explications claires et détaillées

2 Réponses exactes sans explications
ou une seule des deux réponses correctes (60 ou 23) avec réponse erronée ou pas de réponse pour l’autre, avec explications
ou les deux réponses, bien expliquées, mais avec deux erreurs de calcul ou de comptage

1 Une seule des deux réponses, sans explication
ou début de raisonnement correct avec des essais de comptages

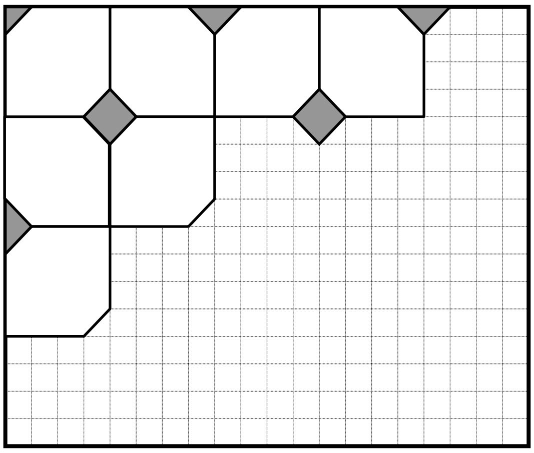
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : 5.I.3. *La boîte de sucre* complété par GP

3. LE PAVAGE DE CLAIRE (Cat. 3, 4)

Claire a commencé à carreler sa salle de bains avec deux types de carreaux, des blancs et des gris, Comme vous le voyez sur le dessin



Les carreaux blancs sont tous de la même forme et de la même grandeur.

Les carreaux gris sont carrés. Claire doit en découper certains en deux ou en quatre parties pour les placer sur les bords et dans les coins. Claire a vu qu'elle allait utiliser tous les morceaux gris.

Combien de carreaux gris sont-ils nécessaires pour carreler toute la salle de bains comme sur la figure ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

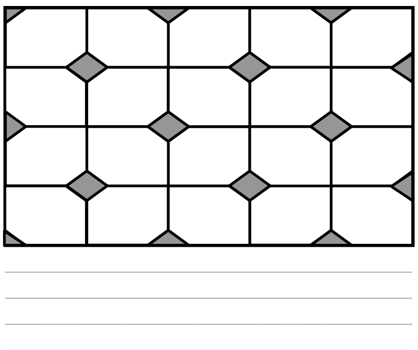
ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Terminer un pavage sur quadrillage composé d'hexagones et de carrés. La trame principale est constituée d'hexagones (inscrits dans des carrés de 4 × 4) qui laissent la place pour des carreaux gris, carrés, dont certains, sur les bords et dans les coins, sont découpés. Compter le nombre de carreaux gris en regroupant les parties de façon à avoir des carreaux entiers.

Analyse de la tâche

- Observer les deux types de carreaux. Le blanc peut être considéré comme un « carré » de 4 × 4 privé deux coins qui sont des demi-carrés de la grille ; le gris est un carré disposé « sur la pointe » et pouvant être découpé en deux ou quatre triangles pour compléter les bords et les coins de la salle de bains.
- Dessiner les carreaux (ou leur contour), selon les régularités observées.



- Compter les carreaux gris et les différentes parties : 6 entiers, 7 moitiés et 2 quarts. Regrouper les moitiés et les quarts pour obtenir des entiers (10).

Ou bien : on peut arriver à la solution en considérant les 20 carreaux carrés blancs auxquels il manque deux quarts des carrés gris, c'est-à-dire la moitié d'un carré gris pour chaque carré blanc, donc l'équivalent de 10 carrés gris.

Attribution des points

4 Réponse correcte (10) avec explications claires (dessin correct et détail du raisonnement qui justifie le nombre de carrés gris)

3 Réponse correcte (10) avec un dessin correct sans explications

2 Réponse correcte (10) avec un dessin peu clair ou avec un dessin incomplet sans explication
ou réponse erronée à cause d'une erreur de comptage avec un dessin correct et sans explication

1 Début du dessin correct (au moins 4 carreaux dessinés correctement)
ou dessin erroné et réponse cohérente avec les dessins
ou réponse correcte sans dessin ni explication

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Genova

4. LA VARICELLE (Cat. 3, 4)

Dans la classe d'Anna, il y a quatre filles de plus que de garçons.
Aujourd'hui, en raison d'une épidémie de varicelle, la moitié des garçons et la moitié des filles sont malades et ne sont pas venus à l'école.
Il ne reste que 14 élèves en classe.

Combien de filles et combien de garçons sont malades ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

- Trouver 2 nombres, dont la somme est égale à 14 et dont la différence des doubles est égale à 4.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes arithmétiques du problème (voir tâche mathématique).
- Les stratégies suivantes sont plus rapides ou plus économiques si les élèves se rendent compte que les nombres totaux de filles et garçons sont pairs (pour qu'on puisse en prendre la moitié)
- Stratégie par essais et ajustements de nombres respectant les contraintes énoncées successivement : essai (hypothèse) respectant les 4 élèves de différence, calcul de la moitié de chaque nombre (malades ou présents), addition des restes et vérification pour savoir si cette somme est 14.
- Stratégie par inventaires des cas, par exemple en commençant l'énumération à 2 pour garçons et donc à 6 (2 + 4) pour les filles et vérification de la 2e condition (cette organisation peut apparaître, mais pas sous forme de tableau), par exemple :

Garçons	Filles	Moitié des garçons	Moitié des filles	**Somme des moitiés**
2	6	1	3	**4**
4	8	2	4	**6**
6	10	3	5	**8**
…	…	…	…	**…**

L'inventaire peut s'arrêter lorsque la somme 14 est atteinte en remarquant que la suite des sommes est croissante.

- Procéder de même, mais en partant des élèves malades (ou présents) et en considérant qu'il y a 2 filles de plus que de garçons.
- Comprendre que dans chacune des deux moitiés d'élèves, le nombre de filles dépasse de 2 le nombre garçons, puis qu'en soustrayant 2 de 14 on obtient deux fois le nombres de garçons présents. Par conséquent le calcul (14-2) : 2 = **6** donne le nombre garçons présents bleus et 6 + 2 = **8** le nombre de filles présentes.
- Raisonner en partant du nombre initial d'élèves (28 = 14 x 2). En soustrayant les 4 filles de plus de plus, on obtient le double du nombre de garçons (24 = 28 - 4). En déduire le nombre de garçons (12 = 24: 2) et celui des filles (16 = 12 + 4), puis le nombre garçons et de filles malades (la moitié des nombres précédents). Ce raisonnement peut aussi conduire à la suite de calculs : (28 – 4) : 2 = 12, 12 + 4 = 16, 12 : 2 = **6,** 16 : 2 = **8.**

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (8 filles malades, 6 garçons malades) avec explications claires et détaillées

3 Une des deux réponses correctes avec explications claires et détaillées et l'autre absente ou erronée (suite à une erreur de calcul)
ou les deux réponses correctes avec explication absente ou incomplète

2 Procédure correcte, mais réponses erronées dues à une erreur de calcul
Réponses respectant les quantités totales d'élèves (16 filles et 12 garçons)

1 Début de recherche cohérente
ou réponses du type "9 filles et 5 garçons" (total = 14 et écart = 4)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : d'après Luxembourg (problème Tom et Lou)

5. LES TROIS MAISONS (Cat. 3, 4, 5)

Trois commerçants, un Suisse, un Italien et un Français habitent dans ces trois maisons de la même rue, qui sont de couleurs différentes.
Le boucher habite dans la maison jaune qui est à côté de la rouge mais qui n'est pas à côté de la verte.
L'épicier, qui n'est pas Suisse, habite à côté du Français.
L'Italien habite au numéro 21 et sa maison n'est pas jaune.

Quelle est la nationalité du pharmacien et de quelle couleur est sa maison ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Reconstituer une répartition de 3 personnes de nationalités différentes, dans trois maisons de couleurs différentes, de 3 métiers différents à partir d'affirmations, négations et relations de voisinage

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a trois nationalités, trois professions et trois couleurs à partir d'une première lecture.
- Lire une à une les informations, constater qu'il faudra parfois en combiner plusieurs pour pouvoir déterminer progressivement les caractéristiques de chaque maison et chaque individu. Par exemple : la maison jaune à côté de la rouge n'est pas à côté de la verte, implique que la rouge est au milieu et que la jaune et la verte sont aux extrémités ; puis l'Italien habitant au numéro 21, qui est à une extrémité dans une maison qui n'est pas jaune est donc dans la maison verte. On sait alors que le boucher de la maison jaune est au 25, que la maison du milieu est rouge et que l'Italien habite au 21 dans la maison verte. Comme il n'est pas suisse ni français, c'est lui l'épicier et il ne reste qu'un choix pour la maison rouge : c'est celle du pharmacien, qui est français.

Ou, émettre une hypothèse concernant la première information et la vérifier avec les autres ou la rejeter, puis procéder, pas à pas, jusqu'à la description complète de chaque maison.

La configuration définitive est, pour les couleurs :	21 vert	23 rouge	25 jaune
pour les nationalités :	Italien	Français	Suisse
pour les professions :	épicier	pharmacien	boucher

Attribution des points

4 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », avec une explication consistant à donner la configuration complète et une description d'une au moins des relations logique (par exemple : l'épicier est italien parce qu'il n'est pas suisse et qu'il habite à côté du Français) avec des termes du genre « parce que », « vu que », « comme il n'est pas … »

3 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », avec une explication se limitant à donner la configuration totale avec des commentaires du genre : « on a suivi les informations », « on a essayé les possibilités »

2 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », sans explications ou avec des commentaires ne donnant aucune information sur la démarche (Par exemple : « nous avons beaucoup réfléchi »)

1 Réponse avec une seule erreur, ou sur la couleur ou sur la nationalité du pharmacien

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Problème 6e RMT.I.05

6. HIRONDELLES ET COLOMBES (Cat. 4, 5)

Quand Laurent se réveille, il voit que des hirondelles et des colombes sont posées sur un fil électrique devant sa maison.

Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 11 hirondelles et 6 colombes s'envolent.

Un peu plus tard, 7 hirondelles et 11 colombes viennent rejoindre les oiseaux qui sont restés sur le fil.

Laurent compte les oiseaux qui sont maintenant posés sur le fil électrique. Il y a 23 hirondelles et 13 colombes.

Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?
Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver la somme de 2 nombres, chacun étant l'état initial dans une situation où l'état final résulte d'une diminution suivie d'une augmentation.

Analyse de la tâche

- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs de deux grandeurs. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles et de colombes - départ de 11 hirondelles et 6 colombes (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 7 hirondelles et 11 colombes (deuxième variation) et état final, de 23 hirondelles et 13 colombes, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial (nombre total d'hirondelles et de colombes).
- Comme c'est le nombre total d'oiseaux au départ qui est demandé, deux raisonnements sont possibles :

le premier portant sur le nombre total d'oiseaux à chaque étape ;

le deuxième sur le nombre de chaque catégorie d'oiseaux à chaque étape.

- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ portant, soit sur le nombre total d'oiseaux (par exemple 20 – 17 + 18 = 21, « trop petit », ... pour aboutir à 35 – 17 + 18 = 36), soit d'une part sur le nombre d'hirondelles et d'autre part sur le nombre de colombes pour aboutir à 27 – 11 + 7 = 23 et 8 – 6 + 11 = 13 et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

soit en remontant dans le temps à partir du nombre total d'hirondelles et de colombes 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : 36 – 18 + 17 = 35 ou séparément à partir du nombre d'hirondelles (23 – 7 + 11 = 27) et de colombes (13 – 11 + 6 = 8) et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

on peut aussi faire le bilan des deux variations soit pour chaque catégorie d'oiseaux : « diminution de 4 (11 – 7) par rapport à l'état initial pour les hirondelles et augmentation de 5 (11 – 6) pour les colombes », soit pour l'ensemble des oiseaux : augmentation de 1 (18 – 17) par rapport à l'état initial.

Attribution des points

4 Réponse correcte (35 oiseaux) avec une explication claire de la procédure suivie (par exemple, la séquence de calculs, schémas, dessins genre bande dessinée ...)

3 Réponse correcte (35 oiseaux) avec explications peu claires ou incomplètes (par exemple un des passages d'un état à un autre non décrit dans la succession)

ou tentatives menées correctement, bien expliquées, mais avec une seule erreur de calcul

ou réponse 27 hirondelles et 8 colombes avec explications claires

2 Réponse correcte sans explications

ou réponse 27 hirondelles et 8 colombes sans explication

ou réponse correcte bien expliquée sur une catégorie d'oiseaux

1 Début de recherche cohérente : une ou deux tentatives infructueuses ou début de raisonnement correct (par exemple calcul de 23 – 7 = 16 hirondelles et 13 – 11 = 2 colombes comme état intermédiaire,

ou réponse 37 avec bilan des deux variations 1, mais 36 + 1 au lieu de 36 - 1)

Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine: Udine

7. PARTIES DE BILLES (Cat. 5, 6)

Dimanche, Gérard a reçu un beau sac de billes et il décide de les prendre toutes, dès le lendemain à l'école, pour jouer avec ses camarades.
Le lundi, il gagne 12 billes, il est très content.
Le mardi, il rejoue, mais il perd 15 billes. Il n'est pas content.
Le mercredi, il perd encore 8 billes. Il est bien triste. De retour chez lui, il compte ses billes et il constate qu'il a perdu la moitié des billes qu'il avait le dimanche lorsqu'il a reçu son sac.
Le jeudi, il ne joue pas car il a peur de perdre encore plus de billes.
Le vendredi, il hésite, mais joue tout de même et gagne 7 billes.

Combien a-t-il de billes dans son sac le vendredi soir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : additions et soustractions de nombres entiers inférieurs à 40, la moitié et le double

Analyse de la tâche

- Lire le problème et se rendre compte qu'il s'agit d'une suite d'additions et soustractions à effectuer, mais qu'on ne connaît pas l'état initial (dimanche).
- Constater que du lundi au mercredi, les variations sont un gain de 12, et deux pertes de 15 et 8, ce qui revient globalement à une perte de 11 (15 + 8 – 12).

  Tenir compte alors que cette perte de 11 est la moitié des billes du dimanche et que le sac contenait donc 22 billes ce jour-là. Comprendre alors que ce qui reste du mercredi est aussi 11 et que le vendredi, après un gain de 7, il aura 18 billes. On peut aussi repartir des 22 billes du dimanche pour arriver à 18 le vendredi (22 + 12 – 15 – 8 + 7 = 18)

Ou, procéder par essais à partir du dimanche, d'abord au hasard puis par essais organisés. Par exemple dimanche 30, lundi 42, mardi 27, mercredi 19, qui n'est pas la moitié de 30 et qui demande un second essai, … jusqu'à trouver 22 le dimanche, 11 le mercredi et 18 le vendredi.

Ou procéder par essais à partir du mercredi et revenir dans le temps.

Toutes les démarches peuvent s'appuyer éventuellement sur une bande ou une droite numérique ou sur des dessins qui représentent, de jour en jour la situation

Attribution des points

4 Réponse, 18 billes le vendredi, avec explications claires (détail des successions jour après jour et organisation des essais)

3 Réponse, 18 billes le vendredi, avec explications peu claires ou seulement une vérification

2 Réponse, 18 billes le vendredi, sans aucune explication

ou une seule erreur de calcul mais avec des explications claires

ou réponse 11 billes le mercredi ou 22 billes le dimanche, avec explications claires (oubli de la question sur le vendredi)

1 Début de raisonnement, succession sur deux ou trois jours mais avec des erreurs de « signes »

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : fj

8. LE BOUQUET DE FLEURS (Cat. 5, 6)

Clara a reçu un bouquet composé de quinze fleurs. Elle constate que dans son bouquet il y a des roses, des tulipes, des marguerites et des jonquilles et que :

- Les nombres des roses, des tulipes, des marguerites, et des jonquilles sont tous différents.
- Il y a quatre fleurs d'un même type.
- Les tulipes et les marguerites forment ensemble un bouquet de six fleurs.
- Les tulipes et les jonquilles forment ensemble un bouquet de sept fleurs.

De combien de fleurs de chaque type le bouquet de Clara peut-il être composé ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Décomposer 15 en une somme de quatre nombres entiers tous différents, dont l'un est 4. La somme d'un des nombres avec un des trois autres est 6 et devient 7 si on le remplace ce dernier par un autre.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut décomposer 15 en une somme de quatre entiers différents dont l'un est 4 et vérifiant les deux conditions.
- Procéder par essais organisés pour vérifier si les nombres trouvés satisfont aux conditions.
- Par exemple, en partant de la troisième condition, énumérer toutes les couples possibles de nombres dont la somme est 6 (marguerites et tulipes). Puis, d'après la quatrième condition, trouver les nombres correspondants des jonquilles. Ensuite, sur la base de la première condition, insérer le nombre 4 dans les ensembles où il n'est pas présent. Enfin, vérifier que la somme des quatre nombres trouvés est 15 et qu'il n'y a pas de nombres répétés.

Ou bien, supposer successivement que les 4 fleurs sont des tulipes, des marguerites des jonquilles ou des roses, rassembler les répartitions possibles dans un tableau comme celui-ci et retenir les solutions.

tulipes	marguerites	jonquilles	roses	total
4	**2**	**3**	**6**	**15**
2	4	5	4	15
3	3	4	5	15
1	5	6	4	16
5	1	2	4	12

- Éliminer les combinaisons comportant deux fois le même nombre ou dont la somme est différente de 15. Conclure qu'il y a 4 tulipes dans le bouquet.

Ou bien, pour une étude plus systématique, comprendre que l'hypothèse de 4 fleurs parmi les tulipes, les marguerites ou les jonquilles donne pour chacune une seule répartition du fait de la donnée des 6 ou 7 fleurs.

Attribution des points

4 Réponse correcte (4 tulipes, 2 marguerites, 3 jonquilles, 6 roses) avec des explications claires montrant l'unicité de la répartition obtenue ou avec un tableau complet des possibilités

3 Réponse correcte avec seulement une vérification ou réponse correcte avec des explications sans l'unicité

2 Réponse correcte sans explication ni vérification

ou réponse incorrecte avec une répartition où seule la condition que « les nombres, sont tous différents » n'est pas respectée

1 Début de raisonnement correct (tentatives infructueuses qui ne respectent pas une ou plusieurs conditions).

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 5, 6

Origine : Milano

9. LES CHÂTAIGNES DE CHARLES (II) (Cat. 5, 6, 7)

Charles a récolté 81 kg de châtaignes. Il commence à les mettre dans trois paniers, un petit, un moyen et un grand.

Les châtaignes qu'il a mises dans le panier moyen pèsent le double de celle qu'il a mises dans le petit panier et les châtaignes qu'il a mises dans le grand panier pèsent le double de celle qu'il a mises dans le panier moyen.

Après avoir rempli les trois paniers, il lui reste quelques kilos de châtaignes, exactement la moitié du poids des châtaignes contenues dans le grand panier.

Combien de kilos de châtaignes Charles a-t-il mis dans chaque panier ?

Combien de kilos lui restent-ils ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Répartir 81 en quatre nombres proportionnellement à 1, 2, 4 et 2.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les relations « double » et « moitié » sont inverses et que « le poids du contenu du grand panier est le double de celui du panier moyen » signifie aussi que « le poids du contenu du panier moyen est la moitié de celui du grand » et que par conséquent, le poids du reste est le même que le poids du contenu du panier moyen.
- Passer à la recherche de quatre nombres un « petit », deux « moyens » qui sont le double du « petit » et un « grand » qui est le double de chacun des « moyens » (ou leur somme) dont la somme est 81.
- Par essais, à partir du petit panier, écrire les quadruplets possibles : 1, 2, 4, 2 ; 2, 4, 8, 4 ; 3, 6, 12, 6 … et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 9, 18, 36, 18 pour satisfaire la condition que le total est 81 (en kg).

Ou bien, comprendre que le poids total des châtaignes, 81 kg, est la somme de 9 termes égaux au poids des châtaignes du petit panier ($n + 2n + 4n + 2n = 9n$). Calculer ainsi ce poids : 81 : 9 = 9 kg dans le petit panier, et donc 9 x 2 = 18 kg dans le panier moyen, et enfin 9 x 4 = 36 kg dans le grand panier, et il reste 36 : 2 = 18 kg de châtaignes.

Attribution des points

4 Réponse exacte et complète (petit panier : 9 kg ; panier moyen : 18 kg ; grand panier : 36 kg ; reste 18 kg) avec explications complètes et claires

3 Réponse exacte avec explications incomplètes ou peu claires

ou, réponse correcte pour chaque panier (9 kg, 18 kg, 36 kg) avec des explications sans indiquer le poids des châtaignes restantes.

2 Réponse correcte sans explication

ou procédure correcte mais avec une erreur de calcul au cours de la résolution

1 Début de recherche traduisant la prise en compte de certaines relations entre les contenus des paniers et le reste.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Belluno

10. CHAT, LAPIN, COCHON D'INDE (Cat. 5, 6, 7, 8)

Trois amies habitant trois villages voisins se rencontrent. Chacune se promène avec son animal de compagnie.

- Le chat de Mylène est tigré et adore chasser les souris.
- Louise et la fille qui possède un lapin noir et blanc portent des lunettes.
- Celle qui habite Ropraz a un cochon d'Inde.
- Claude et son amie qui habite à Corcelles adorent les bonbons.

Quel est le prénom de la fille qui habite à Carrouge ?

Quel animal a-t-elle ? Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Logique

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois amies ont des animaux différents (chat, lapin, cochon d'Inde), et habitent dans trois villages différents (Corcelles, Ropraz et Carrouge).
- Analyser les quatre informations les unes après les autres et noter les déductions successives.
  1e information : Mylène a un chat et par conséquent les autres n'en ont pas
  2e information : Louise n'a pas de lapin, donc a un cochon d'Indes
  3e information : L'amie qui habite Ropraz a un cochon d'Indes, c'est donc Louise
  4e information : Claude n'habite pas à Corcelles, donc Mylène habite à Corcelles.
- Conclure que Claude habite à Carrouge et a un lapin.

Ou bien, rassembler les informations de l'énoncé dans un tableau et compléter logiquement les cases vides en raisonnant comme ci-dessus :

	Chat	Lapin	Cochon	Corcelles	Ropraz	Carrouge
Claude	non	oui	non	**non**	non	oui
Louise	non	**non**	oui	non	**oui**	non
Mylène	**oui**	non	non	**oui**	**non**	non

Attribution des points :

4 Réponse correcte (Claude et son lapin habitent Carrouge) et la démarche bien expliquée
3 Réponse correcte et la démarche est donnée partiellement
2 Réponse correcte sans explications
ou réponse partielle (Claude ou lapin) avec des explications
1 La réponse est incomplète (Claude ou lapin) sans explications
ou début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Suisse romande

11. LE PRIX D'UN STYLO (Cat. 5, 6, 7, 8)

Ahmid achète un stylo. Il paye avec une pièce de 2 euros et la caissière lui rend 2 pièces.
Élia a acheté trois stylos de même prix que ceux d'Ahmid. Elle paye avec un billet de 5 euros et la caissière lui rend aussi 2 pièces.

Quel peut-être le prix d'un stylo ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

Addition, soustraction, euro, combinatoire

Analyse de la tâche

- Dresser l'inventaire des huit pièces de monnaie, en centimes d'euros (1, 2, 5, 10, 20, 50) et en euros (1, 2).
- Remarquer qu'un stylo doit coûter moins de 1,67 € (car 3 stylos coûtent moins de 5 €) et que la somme que la caissière a rendu à Ahmid sur 2 € doit être supérieur à 33 centimes.
- Trouver les combinaisons de 2 pièces faisant une somme supérieure à 33 centimes. Il y en a 13 :
  1 + 50 = 51 ; 1 + 100 = 101 ; 2 + 50 = 52 ; 2 + 100 = 102 ;
  5 + 50 = 55 ; 5 + 100 = 105 ; 10 + 50 = 60 ; 10 + 100 = 110 ;
  20 + 20 = 40 ; 20 + 50 = 70 ; 20 + 100 = 120 ;
  50 + 50 = 100 ; 50 + 100 = 150.
- Calculer ensuite les 13 prix correspondants, puis leur triple, et le reste sur 5 euros, en centimes :

rendu sur 2 euros	40	51	52	55	60	70	100	101	102	105	110	120	150
prix d'un stylo	**160**	149	148	145	140	**130**	**100**	99	98	95	90	80	50
prix de 3 stylos	480	447	444	435	420	390	300	297	294	285	270	240	150
rendu sur 2 euros	**20**	53	56	65	80	**110**	**200**	203	206	215	230	260	350

Parmi ces 13 sommes rendues, trouver celles qui peuvent l'être en deux pièces. Il n'y en a que trois :
20 = 10 + 10 ; 110 = 100 + 10 et 200 = 100 + 100.

Parmi ces 13 sommes rendues, trouver celles qui peuvent l'être en deux pièces. Il n'y en a que trois :
20 = 10 + 10 ; 110 = 100 + 10 et 200 = 100 + 100.

- Rédiger la réponse et expliquer la démarche conduisant à l'exhaustivité :

Le prix d'un stylo peut donc être de

Prix d'un stylo, en euro	Reste sur 2 euro	Reste sur 5 euro
1,60	2 pièces de 20 centimes	2 pièces de 10 centimes
1,30	20 e 50 centimes	1 euro et 10 centimes
1	2 pièces de 50 centimes	2 pièces de 1 euro

Ou : essais au hasard, qui peuvent permettre de trouver une ou deux possibilités, ou même les trois, mais sans assurer l'exhaustivité.

Attribution des points

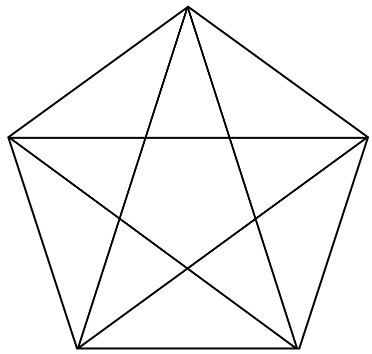
4 Les trois prix possibles (1,60; 1,30 et 1) avec une démarche claire permettant de voir qu'il n'y en a pas d'autres
3 Les trois prix possibles (1,60; 1,30 et 1) sans autres détails ou avec des explications peu claires
2 Deux des trois prix possibles
1 Un des trois prix possibles
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse (sur une idée de l'IREM de Toulouse) 18e RMT. II 12.

12. DES TRIANGLES, OUI, MAIS COMBIEN ? (Cat. 6, 7, 8)

Voici un pentagone régulier, dessiné avec toutes ses diagonales :



Alice dit *: « Je vois 10 triangles dans ce pentagone. »*
Bianca lui répond : « *Moi, j'en vois plus que ça !* »

Combien peut-on voir, en tout, de triangles dans cette figure ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances :

- Géométrie : visualisation, reconnaissance et comptage de triangles dans une figure
- Combinatoire

Analyse de la tâche

- Savoir reconnaître des triangles dans la figure en tenant compte du caractère régulier de la figure pour identifier les triangles égaux ;
- S'organiser pour ne pas oublier de triangles, ne pas comptabiliser deux fois le même. Par exemple :

  les 10 triangles du pavage autour du pentagone central (noté *p* pour la suite de cette analyse); on peut éventuellement constater que 5 n'ont que des angles aigus, (notés *a* pour la suite) et que les 5 autres ont un angle obtus (notés *o* pour la suite).

  les 10 triangles composés d'un triangle *o* et d'un triangle *a* (*a, o*)

  les 5 triangles composés de deux triangles *o* et un triangle *a* (*o, a, o)*, un par sommet du pentagone,

  les 5 triangles (avec une diagonale comme base), composés du pentagone central et de deux triangles *a* (*a, p, a)*,

  les 5 triangles (avec un côté comme base), composés du pentagone central, un triangle *o* et de trois triangles *a* (*o, a, a, p, a)*,

  Soit cinq types de triangles faisant au total 10 + 10 + 5 + 5 + 5 = 35 triangles.

Il y a évidemment de nombreuses autres façons d'organiser l'inventaire, avec de nombreux risques de confusions ou d'oublis :

- nommer tous les « sommets » de la figure (ou les segments) et désigner les triangles par ces sommets (ou ces segments), ce qui aboutit à une notation lourde et longue, difficile à contrôler,
- utiliser des couleurs, ce qui ne permet plus de distinguer les traits,
- nommer les 11 « pavés de base » et désigner les triangles par leur composition de ces pavés,
- travailler par types de triangles d'une autre manière que ci-dessus, en tenant compte par exemple des symétries du pentagone régulier …

La tâche principale est précisément de choisir la représentation la plus efficace pour le contrôle et l'élimination des doublons.

Attribution des points

4 Réponse correcte (35) avec explications claires et complètes (texte, liste ou dessin)

3 Réponse correcte (35) avec explications incomplètes
ou réponse 34 ou 36 avec un seul oubli ou un seul doublon, avec explications

2 Réponse (35) sans aucune explication
ou réponse (25 ou 30) avec oubli d'un seul des 5 types de triangles, avec explications
ou réponse incorrecte due à 2 à 3 oublis ou doublons avec explications

1 Réponse (15, 20 ou 25) avec oubli de deux types de triangles
ou réponse incorrecte due à 4 ou 5 oublis ou doublons

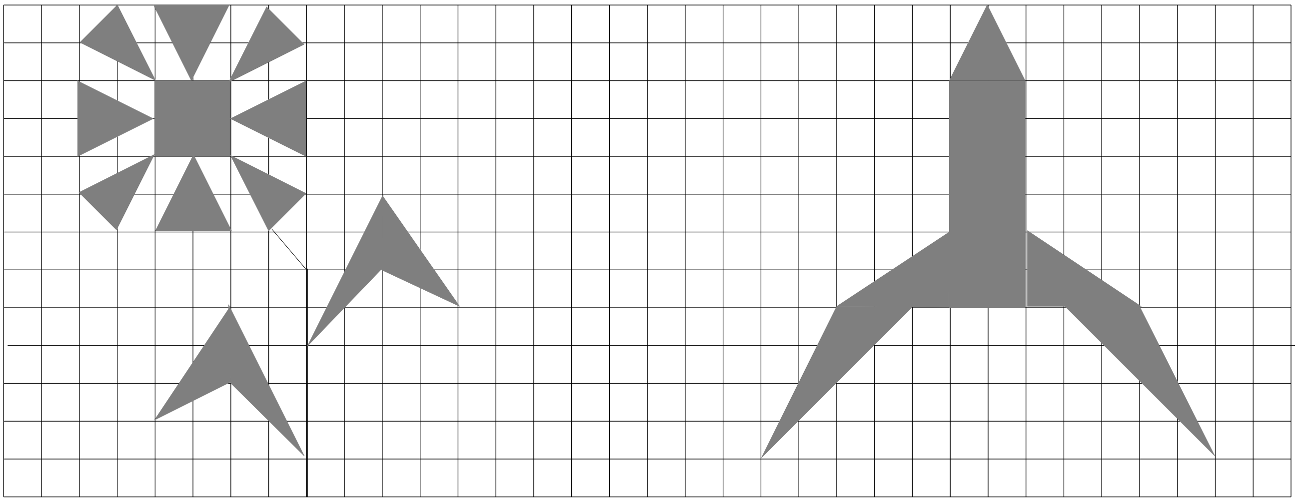
0 Moins de 15 triangles différents repérés

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : 7RMTF.1 adapté par Bourg-en-Bresse

13. FLEUR OU FUSÉE ? (Cat. 6, 7, 8)

Dans la feuille quadrillée ci-dessous, deux figures ont été dessinées en gris : une fleur et une fusée.



Quelle est la figure qui a l'aire la plus grande, la fleur ou la fusée ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaines de connaissances

- Géométrie : décomposition d'une figure en polygones ; triangles, carrés, rectangles, parallélogrammes, trapèzes, aire, équivalence d'aires, symétrie axiale
- Mesure : mesure d'une aire avec une unité de mesure convenable, calcul de l'aire d'une figure particulière en utilisant une formule.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que pour répondre à la question, il faudra déterminer les mesures de chacune des aires des parties grises, car les procédures par compensation ne permettent pas d'aller au-delà des carrés et des rectangles.
- Se rendre compte aussi que le carré du quadrillage s'impose naturellement comme unité d'aire (u), mais que les procédures de comptage ou de recouvrement sont inadéquates parce qu'on ne peut pas recouvrir les triangles avec des carrés entiers.
- Élaborer une stratégie de mesure des aires des triangles rectangles en les considérant comme moitié de rectangles (divisés par deux selon une diagonale). Les deux triangles rectangles de la fusée sont demi-rectangles de 2×3 et ont une aire mesurant 3 u.
- Élaborer ensuite une stratégie de décomposition des grands pétales de la fleur et de la pointe de la fusée en deux triangles rectangles de 1×2 dont l'aire mesure 1 u. On peut aussi voir que ces deux triangles rectangles occupent la moitié d'un carré 2×2 dans lequel ils sont inscrits et que leur aire mesure donc 2 u.
- Élaborer enfin une stratégie plus complexe de décomposition d'un rectangle dans lequel est inscrit un triangle gris en tenant compte de ses parties « blanches » « à soustraire » formées de triangles des rectangles. Exemple : chaque feuille de la fleur peut être divisée en deux parties, inscrites dans des rectangles de 2×3 et de 2×4. Il faut éliminer des triangles rectangles blancs de 2×3 et de 1×2, et, respectivement de 2×4 et de 2×2, pour arriver à des mesures d'aire égales à 2 u ($6 – 3 – 1$ et $8 – 4 – 2$). Même raisonnement pour les petits pétales d'aire 1,5 u ($4 – 2 – 0.5$) et les deux ailes de la fusée d'aires 4 u ($16 – 4 – 8$).
- Calculer enfin les mesures des aires des deux figures par addition. Pour la fleur : $4 + 4 \times 2 + 4 \times 1,5 + 4 \times 2 = 26$ (u) et pour la fusée : $2 + 12 + 2 \times 3 + 2 \times 4 = 28$ (u). Conclure que la partie grise de la fusée est plus grande que celle de la fleur.
- Il y a évidemment de nombreuses modalités de décomposition des figures ou de recomposition et ensuite d'organisation des calculs. La tâche essentielle est d'obtenir le résultat à partir de rectangles entiers ou divisés par deux. Même si certains élèves peuvent déjà avoir rencontré la « formule » de l'aire du triangle, elle ne sera pas utile ici parce que les triangles ne sont pas tous en position traditionnelle avec la base horizontale.

Attribution des points

4 Réponse correcte (la fusée) avec des explications claires de la procédure utilisée

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou une erreur de calcul ou de comptage

2 Réponse avec deux ou trois erreurs de calcul dans le comptage des carreaux mais explications claires de la subdivision des figures,

ou bien calcul correct de l'aire d'une seule des deux figures

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème ou réponse « la fusée parce qu'on le voit sur la figure »

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Siena

14. L'HÉRITAGE DE VENCESLAS (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le roi Venceslas était fier de ses filles et de ses fils et adorait ses petits-enfants. À sa mort, il laissa un testament où il demandait que les 50 millions d'écus de son héritage soient partagés entre chacun des 11 membres de sa descendance de la façon suivante :

- 6 millions pour chaque fils,
- 4 millions pour chaque fille,
- 1 million pour chaque petit-fils et petite fille.

Combien le roi Venceslas avait-il de fils, de filles et de petits-enfants ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissance

- Arithmétique : opérations avec des entiers naturels
- Algèbre : système d'équations du premier degré

Analyse de la tâche

- Repérer les données essentielles (11 personnes de 3 catégories doivent se partager 50 millions en parts de 6, 4 ou 1millions) et les transcrire dans le domaine numérique.

  - La somme des trois nombres de personnes (a fils, b filles et c petits-enfants) de chaque catégorie est égale à 11 ($a + b + c = 11$).

  - Le nombre 50 (l'héritage) doit être exprimé comme la somme de 11 termes égaux à 6, 4 ou 1, qui peuvent être regroupés en multiples de 6, 4 et 1 ($6a + 4b + c = 50$).
- Comprendre que l'usage des pluriels dans l'énoncé indique que le roi a au moins deux fils, deux filles et deux petits-enfants.
- Noter éventuellement que le nombre c de petits-enfants est pair, car il doit être égal à $50 – 6a – 4b$. En déduire que le nombre de fils ou de filles est impair, car le nombre total des héritiers est 11.
- Observer que le nombre a de fils est inférieur à 7, sinon ils auraient à eux seuls au moins 42 millions d'écus et il resterait au plus 8 millions d'écus qui ne suffiraient pas pour deux filles et deux petits-enfants.
- Comprendre que la solution du problème passe par un inventaire des répartitions possibles des 11 héritiers en trois catégories, avec à chaque fois une vérification du total des parts qui doit être 50 (ou par la recherche des solutions entières du système des deux équations écrites ci-dessus).
- Faire des essais au hasard qui peuvent aboutir à la solution sans être certain de son unicité, ou organiser l'inventaire de manière systématique (en s'aidant de traces écrites sous la forme de listes ou de tableaux). L'organisation la plus économique est de considérer en premier lieu les parts des fils (de 6 millions) pour lesquelles les possibilités sont les moins nombreuses, de calculer ce qui reste pour les parts des filles et petits-enfants (4 et 1 millions) puis de vérifier s'il est décomposable en un nombre donné de multiples de 4 et de 1.
- Exemple, parmi les 11 multiples de 6 à considérer, éliminer 66, 60, 54, qui sont supérieurs à 50, puis 48 (reste 2 qui ne permet pas d'obtenir une part de 4) ; puis $42 = 6 \times 7$ (reste 8, qui ne permet pas quatre parts de 4 et 1). Une première solution est $36 = 6 \times 6$ (reste 14 ce qui permet de faire 5 parts pour les 3 filles et les 2 petits-enfants ou $3 \times 4 + 2 \times 1$). Les autres multiples de 6 sont aussi à éliminer : $30 = 6 \times 5$, reste 20, impossible à répartir en 6 parts de 4 et 1 ; $24 = 6 \times 4$, reste 26, impossible à répartir en 7 parts de 4 et 1 ; $18 = 6 \times 3$, reste 32, impossible à répartir en 8 parts de 4 et 1, etc.
- Vérifier en tout cas l'unicité de la solution : 6 fils, 3 filles et 2 petits-enfants.

  Il y a évidemment de multiples manières d'organiser l'inventaire systématique et d'en conserver des traces, qui demandent toutes des décompositions de 50 en sommes de multiples de 6, 4 et 1, et d'économiser des vérifications (par exemple en considérant seulement les quatre nombres possibles de petits-enfants, qui doivent être pairs : 2, 4, 6, 8 et les décompositions correspondantes de 48, 46, 44 et 42 en sommes d'un nombre déterminé de multiples de 4 et de 6).

Ou bien, par l'algèbre il y a également des nombreuses manières de trouver les solutions entières (supérieures ou égales à 2) du système d'équations du premier degré à 3 inconnues : $a + b + c = 11$ et $6a + 4b + c = 50$.

Par exemple, après avoir observé que $a < 7$, procéder en attribuant a successivement les valeurs 6, 5, ...2, résoudre à chaque fois le système des deux équations obtenues avec les inconnues b et constater que l'unique solution acceptable est $a = 6$, $b = 3$ et $c = 2$.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (6 fils, 3 filles, 2 petits-enfants) avec explications détaillées du raisonnement qui mette en évidence qu'il n'existe pas d'autres solutions

3 Réponse correcte avec des explications incomplètes qui ne garantissent pas l'unicité de la solution

2 Réponse correcte sans explication ou avec seulement une vérification

1 Début de recherche cohérente

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda

15. LE PARTERRE DE TULIPES (Cat. 7, 8, 9 10)

M^{me} Petitepart décide de planter des tulipes de couleurs différentes dans un parterre de son jardin.
Elle dispose de tulipes de huit couleurs différentes : rouge, jaune, orange, blanc, lilas, violet, rose et saumon.
Avec les tulipes rouges, elle peut occuper $\frac{1}{2}$ du parterre, avec les tulipes jaunes elle peut occuper $\frac{1}{3}$ du parterre, avec les tulipes orange $\frac{1}{4}$, avec les tulipes blanches $\frac{1}{5}$, avec les tulipes lilas $\frac{1}{6}$, avec les tulipes violettes $\frac{1}{8}$, avec les tulipes roses $\frac{1}{9}$, avec les tulipes saumon $\frac{1}{12}$.
Madame Petitepart veut occuper complètement son parterre et, pour chaque couleur choisie, elle veut utiliser toutes les tulipes à sa disposition. Mais pour y arriver, elle doit bien choisir les couleurs.
Elle se rend compte qu'elle peut choisir trois couleurs de tulipes mais, par exemple, elle ne peut pas prendre ensemble les tulipes rouges, jaunes et orange.

Quelles sont les trois couleurs de tulipes avec lesquelles Madame Petitepart peut occuper entièrement son parterre ?

Est-ce possible d'occuper entièrement le parterre avec les tulipes de quatre couleurs. Si oui, lesquelles ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique: fractions (de numérateur 1), somme et différence

Analyse de la tâche

- Comprendre les critères que Mme Petitepart entend respecter pour planter ses tulipes de façon à couvrir entièrement le parterre de fleurs en utilisant tous les bulbes des couleurs qu'elle aura sélectionnées.
- Observer que la partie du parterre qui peut être couverte avec une variété de tulipes est exprimée par une fraction de numérateur 1 et que l'entier correspond à la totalité du parterre.
- Se rendre compte qu'il faut trouver trois ou quatre fractions, parmi celles données, dont la somme est égale à 1.
- Constater par exemple qu'en choisissant des tulipes rouges, jaunes et orange on obtiendrait 1/2 + 1/3 + 1/4 = 13/12 > 1 et on couvrirait plus que le parterre.
- Procéder par essais successifs et trouver qu'en utilisant des tulipes rouges, jaunes et lilas on peut remplir exactement le parterre : 1/2 + 1/3 + 1/6 = 1
- En procédant de même, trouver qu'en utilisant les tulipes rouges, oranges, lilas et saumon, on obtient une seconde solution : 1/2 + 1/4 + 1/6+ 1/12 = 1

Ou réduire au même dénominateur les 8 codes fractionnaires (le plus petit est 360) et chercher trois (puis quatre) numérateurs dont la somme est égale à 360.

Attribution des points

4 Réponse correcte aux deux questions (rouge, jaune, lilas) et (rouge, orange, lilas, saumon) avec explications claires
3 Réponse correcte aux deux questions avec des explications peu claires ou seulement avec une vérification
2 Réponse correcte à une seule question avec explications
ou réponse correcte aux deux questions sans explications
1 Début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

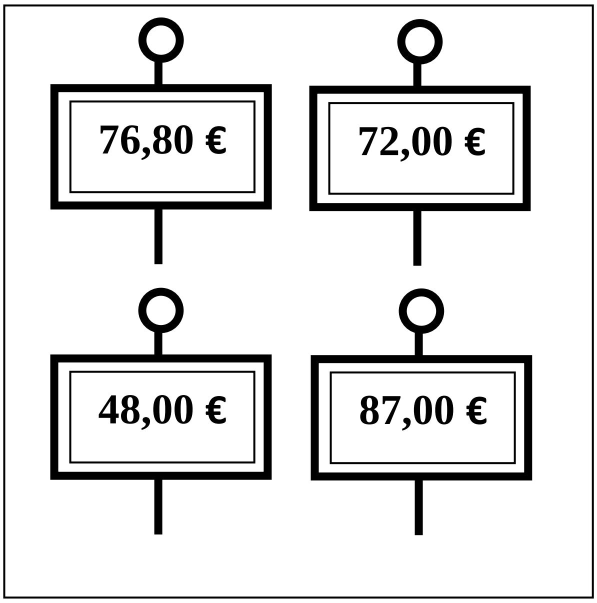
Origine : Lodi

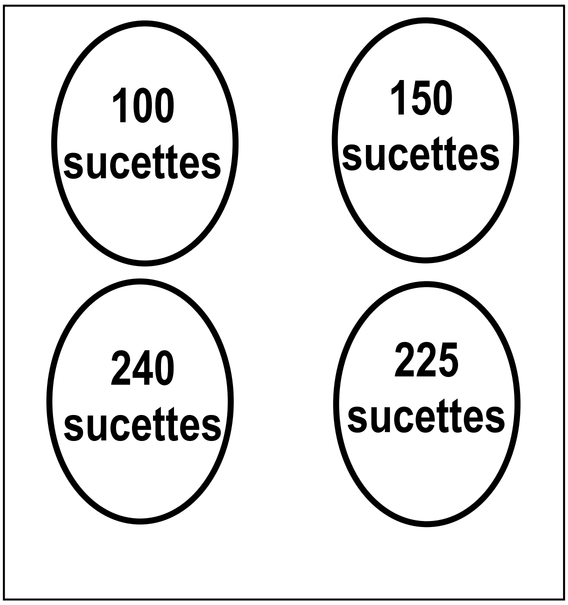
16. DES SUCETTES À GOGO (Cat. 8, 9, 10)

Un commerçant a préparé 4 lots de sucettes : un lot de 100 sucettes, un de 150, un de 225, et un de 240. Il veut indiquer le prix de chaque lot, sachant que le prix d'une sucette est le même dans tous les lots. Pour cela, il veut utiliser les étiquettes ci-dessous, mais en calculant les prix à inscrire, il s'est trompé pour l'une d'entre elles.

Corrigez l'étiquette fausse et attribuez à chaque lot l'étiquette qui lui revient.

Expliquez votre réponse.





ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : proportionnalité

Analyse de la tâche

Comprendre que le prix d'un lot et le nombre de ses sucettes sont des grandeurs directement proportionnelles puisqu'on sait que le prix d'une sucette est le même dans tous les lots.

Remarquer que puisqu'une des étiquettes est fausse, le plus petit prix ne correspond pas nécessairement au plus petit lot, ni le plus grand au lot le plus important.

Faire l'hypothèse que le lot de 100 sucettes coûte 48 €, ce qui fait 48 centimes la sucette. Calculer les prix des autres lots sur cette base : 150 sucettes devraient coûter 72 €, 225 sucettes devraient coûter 108 € et 240 sucettes devraient coûter 115,20 €. Constater par conséquent que cette hypothèse conduit à une contradiction car on sait qu'une seule étiquette est fausse. En déduire que l'étiquette 48 € ne convient pas pour le lot de 100 sucettes.

Faire une hypothèse sur le prix d'un autre lot et la tester en calculant les prix des lots restants. Trouver que seule l'hypothèse 150 sucettes coûtent 48 € convient, et qu'alors 225 sucettes coûtent 72 € et 240 sucettes coûtent 76,80 €. En déduire le prix de 100 sucettes en utilisant le prix à l'unité (0,32 € / sucette). Conclure que l'étiquette 87 € est fausse et doit être remplacée par 32 €.

Ou : calculer les 16 prix des sucettes correspondant aux quatre lots et aux quatre étiquettes (dans un tableau 4×4 à double entrée par exemple) et constater que le seul prix qui apparaît trois fois est 0,32 € et en déduire que les trois correspondances exactes sont ($48/150 = 72/225 = 76,8/240 = 0,32$) et qu'il faut recalculer le prix du lot de 100, qui est 32 €.

Attribution des points

4 Réponse correcte complète (l'étiquette fausse est celle de 87 € à remplacer par 32€ ; 100 sucettes coûtent 32 €, 150 coûtent 48 €, 225 coûtent 72 €, 240 coûtent 76,80 €) avec explications claires et complètes de la démarche conduisant au résultat

3 Réponse correcte complète sans explication ou avec explications confuses de la démarche conduisant au résultat

2 Réponse incomplète mais argumentée permettant d'affirmer que l'étiquette fausse est 87 €, ou que c'est celle correspondant au prix de 100 sucettes

1 Début de démarche correcte : par exemple, une suite de calculs cohérents permettant d'invalider une hypothèse faite sur le prix d'un lot.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Bourg-en-Bresse