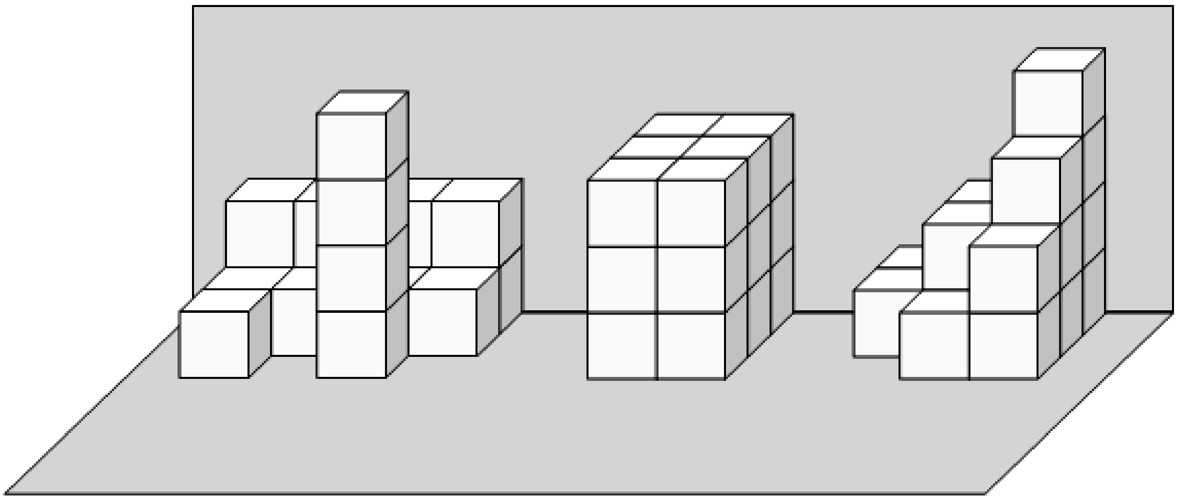
Tableau récapitulatif : épreuve d'entraînement novembre 2023

		Catégories				
	Problèmes (titres et épreuves)	5	6	7	8	9
1	Jeu de cubes (24.I.07)	X				
2	Le bal des animaux (25.I.05)	X				
3	Qu'il fait bon lire ! (20.I.06)	X				
4	Monsieur Charles (26.I.06)	X				
5	Le jeu des questions (20.I.08)	X	X			
6	Carré ou rectangle ? (16.F.04)	X	X			
7	La tempête (27.II.08)	X	X	X		
8	Les dessins du grand-père (22,I.10)		X	X		
9	Les anniversaires (25.II.12)		X	X	X	
10	Les bracelets décorés (26.I.11)		X	X	X	
11	Partage d'un terrain (24.I.14)		X	X	X	X
12	À la parfumerie (23.II.12)			X	X	X
13	Polygones (26.F.13)			X	X	X
14	Le tapis roulant (24.F.18)				X	X
15	Le dallage de Fabio (25.I.17)				X	X
16	Cinéma en jeu (27.I.19)					X
17	Quadrillage (18.I.19)					X

1. JEU DE CUBES (CAT. 5)

Laurent, Jean et André jouent avec des cubes.
Chacun d'eux a fait une construction en empilant des cubes les uns sur les autres contre un mur.



Combien chacun d'eux a-t-il utilisé de cubes pour faire sa construction ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

- Déterminer à partir de représentations en perspective cavalière le nombre de cubes nécessaires à la réalisation de trois assemblages.

Analyse de la tâche

- Observer les représentations et comprendre que sur les cubes visibles une, deux ou trois de leurs faces sont visibles. Comprendre qu'il y a aussi des cubes qui sont cachés et dont il faut tenir compte et que leur existence est révélée par la présence de cubes placés au-dessus.
- Imaginer ou réaliser les constructions avec des cubes à disposition en classe.
- Dénombrer les cubes qui composent chaque construction. Le dénombrement peut se faire par comptage un a un ou en recourant à des calculs (par exemple construction de Laurent $3 \times 4 + 4 + 1 = 17$; celle de Jean $3 \times 2 \times 3 = 18$ celle d'André $3 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 16$) ou calculs similaires.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Laurent : 17 cubes, Jean : 18 cubes, André : 16 cubes) avec explication de la procédure utilisée (flèches indiquant les cubes cachés, calculs, détails du comptage par rangs ou par piles, …)

3 Réponse correcte sans explications ou explications partielles (pour une seule construction, par exemple) ou une seule erreur de comptage en plus ou en moins, sur une des constructions,

2 Réponse avec une erreur de comptage en plus ou en moins sur deux des constructions

1 Réponse erronée avec erreur de comptage en plus ou en moins sur les trois constructions ou comptage seulement des cubes visibles (14 cubes pour chacune des trois constructions)

0 Incompréhension du problème (par exemple comptage de toutes les faces visibles même celles qui appartiennent à un même cube : Laurent 29, Jean 21, André 24)

Niveaux : 4, 5

Origine: Rozzano

.

2. LE BAL DES ANIMAUX (CAT. 3, 4, 5)

Ce soir, c'est le grand bal des animaux qui rassemble des éléphants, des girafes et des zèbres.

Les éléphants et les girafes sont arrivés les premiers. Chaque éléphant est venu accompagné d'une girafe et chaque girafe est venue accompagnée d'un éléphant.

Au total, 65 animaux sont venus au bal. Le nombre de zèbres est égal à la moitié de celui des éléphants.

Combien de zèbres sont venus au bal ce soir ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver trois nombres connaissant leur somme et sachant que, deux d'entre eux sont égaux et que le troisième est égal à leur moitié.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : autant de girafes que d'éléphants, le nombre de zèbres est égal à la moitié du nombre d'éléphants et donc de girafes.
- Utiliser une procédure graphique, par exemple recours à un schéma où l'élève représente progressivement des groupements de 2 éléphants, 2 girafes et 1 zèbre jusqu'à obtenir 65 animaux représentés, puis dénombrer les zèbres.

Ou, utiliser une procédure numérique par essais contrôlés de triplets de nombres vérifiant les deux premières conditions (due nombres égaux, le 3e égal à la moitié d'un des autres nombres) pour, à la fin, trouver 3 nombres dont la somme est 65 (26, 26 et 13) et conclure qu'il y a 13 zèbres.

En particulier, faire un premier essais en divisant 65 par 3 (quotient = 21 ; reste = 2), en déduire que le nombre de zèbres est inférieur à 21, puis essayer d'autres nombres de zèbres en contrôlant chaque fois les conditions de l'énoncé.

Ou utiliser une procédure numérique par déduction, par exemple considérer des groupements de 5 animaux (2 é + 2 g + 1 z) pour vérifier les 2 premières conditions, calculer 65 : 5 = 13, conclure qu'il y a 13 groupements identiques avec 1 zèbre par groupement, donc 13 zèbres.

Attribution des points

4 Réponse correcte (13 zèbres) avec description claire et complète de la procédure utilisée.

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire de la procédure utilisée.

Réponse erronée due à une erreur de calcul, mais avec description claire et complète de la procédure utilisée.

2 Réponse correcte sans description de la procédure, mais avec vérification explicite des contraintes.

1 Réponse correcte sans description de la procédure

ou début de recherche correct avec calcul de sommes de 3 nombres, montrant que deux des conditions ont été prises en compte.

ou procédure correcte, avec plusieurs erreurs de calcul.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Groupe problèmes, d'après une idée de Campobasso

3. QU'IL FAIT BON LIRE ! (CAT. 5)

Fabio a reçu en cadeau un livre de 174 pages et décide d'en organiser la lecture de la façon suivante:
- il ne lira pas le dimanche ;
- tous les autres jours, sauf le mercredi, il lira le même nombre de pages ;
- il lira 15 pages de plus le mercredi, car il a congé l'après-midi.

En faisant comme cela, Fabio arrivera à lire tout le livre en deux semaines entières.

Combien de pages doit-il lire le mercredi et combien les autres jours pour finir son livre en deux semaines ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la solution.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : nombres jusqu'à 200, les quatre opérations

Analyse de la tâche

- Savoir que dans deux semaines il y a 14 jours.
- Se rendre compte que dans ces deux semaines il y a deux dimanches et deux mercredi (et qu'il lira 12 jours, dont 2 avec 15 pages en plus).
- Partir des 174 pages, enlever les 30 pages (2 x 15) qu'il lit en plus les mercredis et trouver le nombre de pages qu'il lit régulièrement en 12 jours (144).
- Diviser 144 par 12 et trouver que Fabio doit lire 12 pages chaque jour.
- Ajouter les 15 pages qu'il lit en plus le mercredi pour trouver les pages qu'il lit ce jour-là (12 + 15 = 27).

Ou: procéder par essais en faisant des hypothèses sur le nombre de pages lues chaque jour, différent du mercredi. Par exemple supposer que ce soient 10 et trouver qu'on aurait [(10 x 5) +25] x 2 =150 pages lues en deux semaines: trop peu. Essayer avec 11 et trouver que ce n'est pas encore convenable ; trouver au contraire qu'avec 12 on obtient exactement 174 = [(12 x 5) + 25] x 2).

Ou : considérer que si chaque jour des deux semaines, différent du dimanche, Fabio avait lu le même nombre de pages, cela aurait fait 14 pages (174 : 12) avec un reste de 6 pages. Procéder ensuite en enlevant chaque fois 1 au nombre des pages lues chaque jour (on augmente ainsi chaque fois le reste de 12 pages). On trouve alors que, si on suppose 12 pages lues chaque jour, on obtient un reste de 30 pages (les 15 en plus des deux mercredis).

Attribution des points

4 Réponse correcte (27 pages le mercredi et 12 pages les autres jours sauf les dimanches), avec calculs et explications

3 Réponse correcte sans détail des calculs ou explications confuses

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse erronée due à une démarche correcte avec une seule erreur de calcul

1 Raisonnement qui ne tient pas compte d'une des conditions (le dimanche ou le mercredi ou le nombre de jours de lecture)
ou repérage des 12 jours de lecture effective ou des 30 pages lues le mercredi

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : Ticino

4. MONSIEUR CHARLES (CAT. 5)

Dans l'armoire de Monsieur Charles, il y a :

• 4 chapeaux : un rouge, un vert, un jaune et un bleu ;

• 4 pantalons : un rouge, un vert, un jaune et un bleu ;

• 4 vestes : une rouge, une verte, une jaune et une bleue.

Chaque jour, Monsieur Charles porte un chapeau et un pantalon de la même couleur, mais une veste d'une couleur différente.

Aujourd'hui, 1er mars, Monsieur Charles sort de sa maison avec un chapeau et un pantalon rouges et une veste verte. Demain, il fera un choix différent, et ainsi de suite pour les jours suivants.

Quel est le premier jour après le 1er mars où Monsieur Charles devra s'habiller de la même manière que l'un des jours précédents ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer le nombre de triplets formés avec 3 objets (chacun pouvant être de 4 couleurs différentes), de telle façon que deux objets soient de même couleur et le troisième d'une couleur différente.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes de la situation : les différentes manières de s'habiller dépendent du choix de deux couleurs sur quatre, et de l'attribution de ces 2 couleurs (une couleur pour le chapeau et le pantalon, l'autre pour la veste)
- Déterminer une stratégie qui permette de produire des triplets respectant les contraintes (sans organisation préalable), puis suivie ou non d'une organisation des triplets trouvés pour éliminer les doublons et trouver les manquants. Puis dénombrement des triplets obtenus. (Cette stratégie, sans organisation au départ risque de produire des doublons et, surtout, de faire oublier des possibilités.)

Ou, choisir par exemple, rouge pour le chapeau et le pantalon, et une des 3 autres couleurs pour la veste, ce qui conduit aux triplets RRV, RRG, RRB. De même, pour chacune des trois autres couleurs possibles pour le chapeau et le pantalon, il y a trois possibilités différentes pour la veste. En déduire qu'il y a un total de douze possibilités.

- Conclure que le 13 mars est la première journée où Monsieur Charles sera obligé de s'habiller de la même manière qu'un des jours précédents.

Attribution des points

4 Réponse correcte (13 mars), avec une explication claire (par exemple, une liste et/ou un calcul des 12 possibilités différentes)

3 Réponse correcte, mais avec des explications peu claires ou incomplètes, par exemple, les possibilités ne sont pas données en détail ou le calcul n'est pas expliqué

2 Procédure correcte conduisant aux 12 triplets possibles, mais réponse "13 mars" absente
ou réponse "12 mars" avec la découverte des 12 possibilités
ou réponse "13 mars" sans explication

1 Description de 6 à 11 possibilités différentes avec ou sans indication du jour correspondant
ou réponse incorrecte due à des doublons dans les possibilités recensées
ou réponse 13 mars avec 12 possibilités qui ne sont pas toutes différentes
ou réponse 25 mars si la même couleur pour chapeau et pantalon, n'est pas prise en compte (4 séries de 6 combinaisons)
ou réponse « 17 mars » si les élèves ne tiennent pas compte de la même couleur du chapeau et du pantalon

0 Production de moins de six possibilités différentes
ou incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5

Origine : Siena

5. LE JEU DES QUESTIONS (CAT. 5, 6)

Le *Jeu des questions* se joue sur un ruban de nombres comme celui-ci :

…	-5	-4	-3	-2	-1	Départ	1	2	3	4	5	6	7	8	…

avec un pion par joueur, posé sur la case « départ » au début du jeu, et avec un paquet de cartes - questions.
Chaque joueur, à son tour, tire une carte du paquet. Il lit la question écrite sur la carte et il y répond.
Si la réponse est juste, il avance son pion de deux cases. Si la réponse est fausse, il recule son pion de 6 cases.
Marie et Jean ont tiré chacun 24 cartes et ils ont répondu chacun aux 24 questions.
À la fin du jeu, le pion de Marie se retrouve sur la case "Départ" et le pion de Jean est sur la case 24.
Combien Marie a-t-elle donné de réponses justes et de réponses fausses ? Et Jean ?
Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine conceptuel

- Arithmétique : addition, multiplication, soustraction, multiples

Analyse de la tâche :

- Se rendre compte que si un enfant avait répondu juste à toutes les questions son pion serait sur la case 48 (24 x 2).
- Constater qu'une réponse erronée fait reculer le pion de 6 cases, et que cela annule donc 3 réponses justes ou encore que, pour 4 réponses, si 3 sont justes et 1 est fausse, cela revient à un score nul.
- Pour Marie, à l'aide de calculs qui puissent expliquer le raisonnement, trouver que 6 réponses sont fausses (6 x 6 = 36) et 18 sont justes (18 x 2 = 36) ; avec un score final de 0 et le pion sur la case de départ : 36 – 36 = 0 ;

  ou considérer que, comme son score total est nul, cela résulte de 6 « paquets de réponses » composées d'une fausse et de 3 justes, soit au total 6 fausses et 18 justes.
- Pour Jean : en procédant de même, comprendre que si son pion se trouve sur la case 24, cela veut dire que, parmi ses 24 réponses, 21 sont correctes (21 x 2 = 42) et 3 sont fausses (3 x 6 = 18) ; 42 – 18 = 24 ; etc.

Ou : procéder à une recherche systématique pour identifier toutes les possibilités (par exemple à l'aide d'un tableau) :

Réponses correctes	Réponses fausses	Score positif	Score négatif	Case d'arrivée
24	0	48	0	48
23	1	46	6	40
22	2	44	12	32
21	**3**	**42**	**18**	**24**
…	…	…	…	…
18	**6**	**36**	**36**	**0**

- Formuler les deux réponses: Marie, 18 réponses justes et 6 fausses; Jean 21 justes et 3 fausses.

Attribution des points

4 Les deux réponses correctes (18 et 6 pour Marie, 21 et 3 pour Jean), avec explications complètes (schéma ou tableau ou calculs, qui montrent d'éventuels essais)

3 Les deux réponses correctes, avec explications incomplètes

2 Les deux réponses correctes, sans explications
ou seulement la réponse pour l'un des enfants, bien justifiée

1 Début de recherche cohérent
ou réponses fausses par erreur de calcul

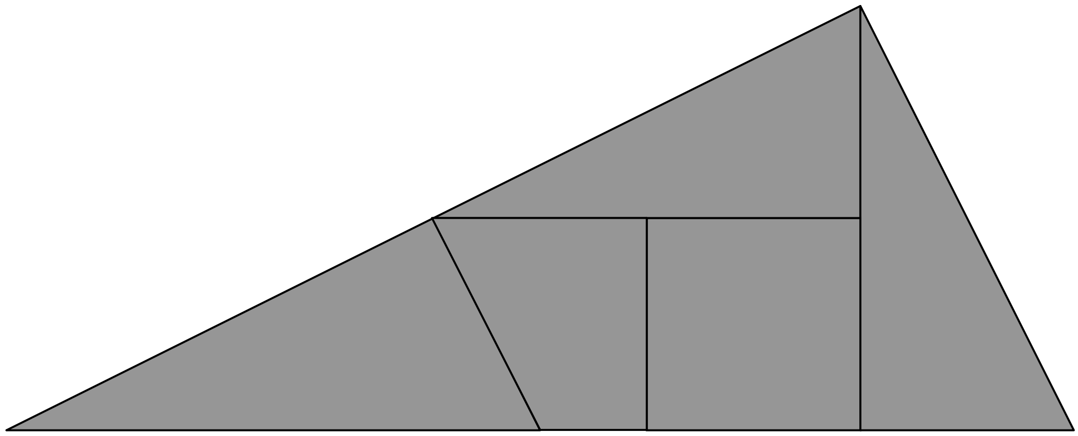
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Milano

6. CARRÉ OU RECTANGLE ? (CAT. 3, 4, 5)

Voici un puzzle en forme de triangle, composé de cinq pièces :



Françoise dit qu’on peut former un puzzle carré avec ces cinq pièces, sans qu'elles se recouvrent et sans qu'il y ait de trou.

Julie dit qu’on peut aussi former un puzzle rectangle, non carré, avec ces cinq pièces.

Essayez de construire un carré avec ces cinq pièces et montrez comment vous avez fait.

Puis essayez de construire un rectangle, non carré, et montrez comment vous avez fait.

ANALYSE *A PRIORI*

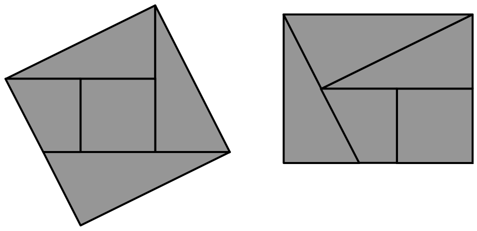
Domaine de connaissances

- Géométrie : manipulation et observation de figures : carrés, rectangles et triangles, angles
- Mesures : comparaison de côtés et d’angles

Analyse de la tâche

- Observer les cinq pièces et se rendre compte que si l’on veut reconstituer des puzzles, il faut les découper ou les reproduire très précisément pour pouvoir comparer leurs côtés et leurs angles.
- Se convaincre (explicitement ou implicitement, par des superpositions, juxtapositions ou mesures) : qu’une des pièces qui a quatre côtés est un carré, que l’autre a deux angles et deux côtés égaux à ceux du carré ; que les trois autres pièces sont des triangles un angle « comme ceux du carré » qui ont et que deux de ces triangles sont superposables ; ...
- Procéder par essais en découpant les pièces, les translatant, les tournant ou les retournant, (en identifiant en particulier les pièces qui permettent d’obtenir des angles droits ou des parallèles) ... jusqu'à obtenir le rectangle et le carré.

  Par exemple, une rotation d’un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet droit permet d’obtenir le carré ; une rotation d’un demi-tour du « grand triangle » autour du sommet supérieur et une translation du triangle de droite permettent d’obtenir le rectangle non carré.



Attribution des points

4 Deux dessins ou assemblages de pièces découpées, corrects et avec une précision permettant de reconnaître clairement les cinq pièces

3 Un seul dessin ou un seul assemblage de pièces correct, l’autre figure étant approximative

2 Un seul dessin ou un seul assemblage de pièces correct, sans solution pour l’autre figure
ou deux dessins ou assemblages où une ou deux pièces ne sont pas reconnaissables ou très imprécises

1 Une figure reconstituée seulement mais imprécise ou incomplète

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4, 5

Origine : Puglia

7. LA TEMPÊTE (CAT. 5, 6, 7)

À “Horizon Plage”, les parasols étaient habituellement disposés en rangées de 12.

Cette année, cependant, après une tempête, la mer a recouvert une partie de la plage et il a fallu retirer les deux rangées de parasols les plus proches de la mer.

Pour placer tous les parasols, on en a ajouté 4 dans chaque rangée qui restait.

Combien y a-t-il de parasols à “Horizon Plage” ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver le produit de 12 et d’un nombre x qui est aussi le produit de 16 et de x - 2

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre total de parasols est le même que l’année précédente.
- Comprendre que le nombre de rangées, de l’ancienne disposition valait 2 de plus que celui de la nouvelle.
- Comprendre que le nombre de parasols à réorganiser est 24 (= 2 × 12).
- Comprendre que si on divise ce nombre par 4 on obtient le nombre de rangées restantes (6).
- Calculer le nombre de parasols par rangée dans la nouvelle disposition (12 + 4 = 16).
- Calculer pour terminer le nombre total de parasols (6 × 16 = 96).

Ou, après avoir compris qu’il y a 24 parasols à replacer à raison de 4 par rangée, dessiner un rang de 12 + 4 parasols et continuer jusqu’à ce que les 24 parasols soient tous replacés (sur 6 rangs).

- Puis calculer le nombre total de parasols (6 × 16 = 96)

Ou, comparer les deux situations pour visualiser les parasols avant et après la tempête

	avant	après	
1e rang	12	12 + 4 = 16	
2e rang	24	24 + 8 = 32	
3e rang	36	36 + 12 = **48**	Non acceptable parce qu’il y a un seul rang de moins
4e rang	**48**	48 + 16 = 64	
5e rang	60	60 + 20 = 80	
6e rang	72	72 + 24 = **96**	Acceptable parce qu’il y a deux rangs de moins
7e rang	84	84 + 28 = 112	
8e rang	**96**		

Ou Comprendre qu’il y a 16 parasols par rang dans la nouvelle disposition.

- Procéder par essais en cherchant un multiple commun de 12 et 16 tel que ce soit le n^e de 16 et le $(n + 2)^e$ de 12.
- Trouver que ce multiple est 96 et vérifier qu’il n’y a pas d’autres solutions.

Attribution des points

4 Réponse correcte (96 parasols) avec explications claires et calculs détaillés, ou description complète des essais effectués

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte sans explication (ou seulement avec la phrase “nous avons fait des essais”)
ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul, par exemple la réponse 128 pour avoir calculé 8 rangs plutôt que 6 (24 : 4 = 8)

1 Réponse erronée due au fait d’avoir considéré seulement 12 parasols par rang (6 × 12 = 72), ou début de raisonnement correct

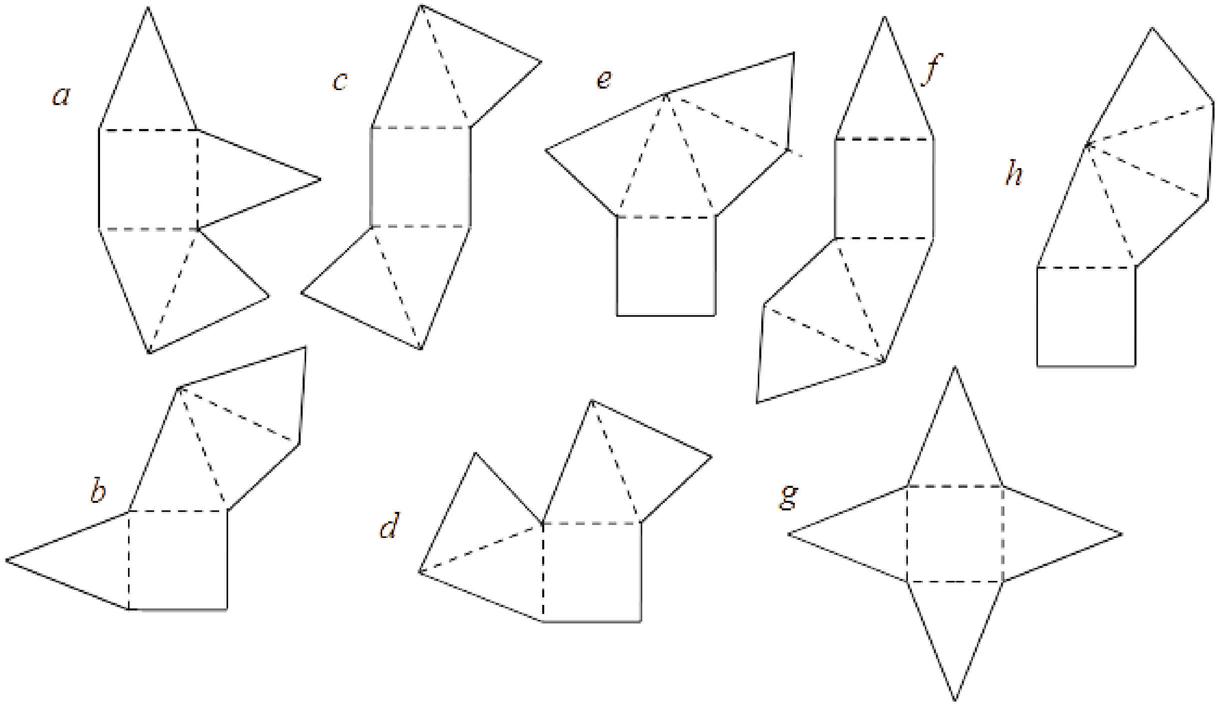
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Milano

8. LES DESSINS DU GRAND-PÈRE (CAT. 6, 7)

Louise a trouvé ces huit dessins dans un vieux cahier de mathématiques de son grand-père.



Elle les observe attentivement et constate qu'ils sont tous formés d'un carré et de quatre triangles isocèles égaux.

Elle remarque aussi que si l'on découpait ces dessins et si on les pliait en suivant les pointillés, on obtiendrait dans certains cas une pyramide, mais pas dans les autres cas, parce que deux faces seraient l'une sur l'autre et il en manquerait une pour compléter la pyramide

Parmi ces huit dessins, quels sont ceux qui ne permettent pas de construire une pyramide ?

Coloriez en rouge les deux faces qui se retrouveraient l'une sur l'autre dans les dessins qui ne permettent pas de construire une pyramide.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

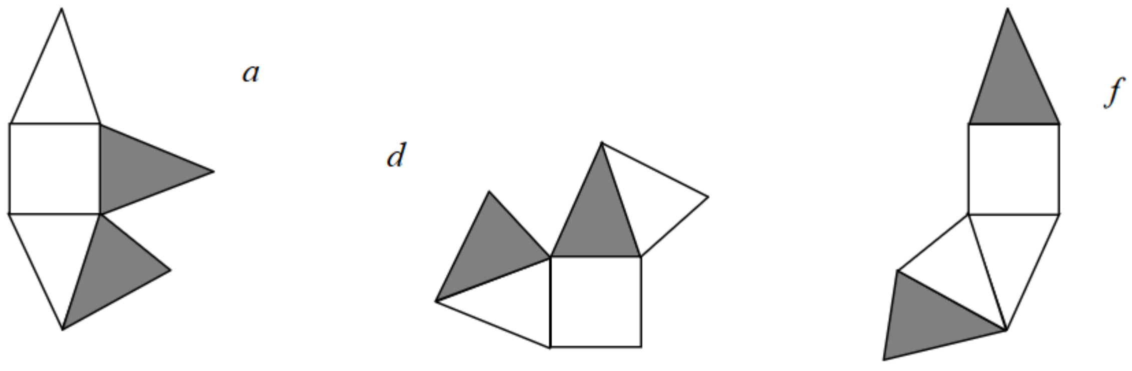
Reconnaître les patrons (développements) corrects d'une pyramide régulière à base carrée par visualisation dans l'espace ou découpage et déterminer ceux qui sont incorrects. Trouver les faces qui se superposent après la construction.

Analyse de la tâche

- Découper et plier effectivement les modèles pour s'apercevoir que *a, d* et *f* ne sont pas des patrons de pyramides mais que *b*, *c*, *e*, *h* le sont.

ou : imaginer les mouvements des faces dans l'espace pour arriver au même résultat.

Dans les deux cas, colorier les deux faces qui se superposent dans *a, d* et *f*.



Attribution des points

4 Solution correcte, découverte des trois figures *a, d. f,* avec les faces qui se superposent coloriées

3 Découverte des trois développements incorrects *a, d, f* et une seule erreur (ou oubli) dans le coloriage des faces

2 Découverte de deux seulement des trois développements incorrects, avec les faces qui se superposent coloriées

ou découverte des trois figures *a, d, f,* avec les faces indiquées mais avec un développement correct considéré comme faux

ou découverte des trois développements incorrects avec de 2 à 3 erreurs de coloriage ou oublis dans le coloriage des faces (par exemple seulement une des deux faces qui se superposent pour chaque dessin)

1 Un seul faux patron découvert avec coloriage correct

ou autres types de confusions ou erreurs, montrant toutefois une compréhension de la tâche ou des essais

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Origine : Riva del Garda + 17.I.13

9. LES ANNIVERSAIRES (CAT. 6, 7, 8)

Martine et son père Marc fêtent leur anniversaire le même jour. Cette année, en 2017, leurs âges s'écrivent avec les deux mêmes chiffres : Martine a 37 ans et Marc 73 ans.

Y a-t-il déjà eu d'autres anniversaires où leurs deux âges s'écrivaient avec les mêmes chiffres ? Et il y en aura-t-il encore après 2017 ?

Donnez les deux âges de Martine et Marc pour chacun de ces autres anniversaires et expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver tous les couples possibles de nombres à deux chiffres dans lequel le chiffre des dizaines de l'un correspond au chiffre des unités de l'autre et vice versa, donnant la même différence.

Analyse de la tâche

- L'appropriation du problème nécessite la compréhension que chaque année les âges changent et augmentent d'une unité, l'an prochain ils auront 38 et 74 ans, l'année suivante 39 et 75 ans et ainsi de suite ; que les âges avancent au même rythme dans le temps et que l'écart reste constant ; la différence des âges 73 – 37 = 36 reste toujours la même.
- On pourrait alors partir de 0 et 36 ou 10 et 46.
- On peut construire deux suites en relation du type :
- Martine 0 3 4 **15 26 37 48 59** 70...81
- Marc 36 39 40 **51 62 73 84 95**...106...117
- et ainsi trouver toutes les solutions.
- Il faut savoir limiter les deux suites : 64 et 100 (et au-delà) ne conviennent pas car ils ne remplissent pas la condition « nombres à deux chiffres » ; de même 09 et 45 (et en deçà).
- On peut aussi remarquer que, pour trouver tous les âges qui nous intéressent, on doit à chaque fois ajouter 11 à chaque nombre du couple (15, 51) : (26, 62) (37, 73) (48, 84) (59, 95).
- Ou alors commencer par la différence entre 73 et 37 = 36 ; chercher ensuite les nombres dont la différence entre les chiffres des unités est 6 (par exemple 11 – 5 = 6; 12 – 6 = 6 .; 13 – 7 = 6 ; 14 – 8 = 6 ; 15 – 9 = 6), puis en déduire que les chiffres des dizaines peuvent être obtenus par l'échange avec ceux des unités. Par exemple, de 14 – 8 = 6, voir que 84 et 48 conviennent.
- Ou exclure tous les âges de Martine plus petits que 10 ; essayer d'inverser les chiffres à partir de 12 et comprendre que la différence augmente toujours de 9, jusqu'à arriver à 15 et 51, où la différence est vraiment 36. Comprendre qu'au-delà du 15 la différence augmente. Passer à la dizaine suivante, en partant de 23 et trouver 26 et 62, dont la différence est 36. On comprend ici qu'il y a une régularité ; nous arrivons ainsi aux âges indiqués dans le texte, 37 et 73 ; les autres âges qui conviennent seront 48 et 84 et 59 et 95, parce qu'à chaque fois les âges augmentent de 11 (une dizaine plus une unité).
- Ou encore, en s'appuyant sur les caractéristiques de la numération décimale de position, poser que l'âge de Marc est de 10 a + b et que l'âge de Martine est alors de 10 b + a (a et b étant des nombres entiers entre 0 et 9, avec a > b (car Marc est plus âgé).
- On doit donc avoir 10 a + b = 10 b + a + 36, d'où 9 (a – b) = 36 et donc a – b = 4. Le cas b = 0 est exclu car on doit trouver des nombre à deux chiffres. On trouve donc b = 1 et a = 5 (15 ans et 51 ans), b = 2 et a = 6 (26 ans et 62 ans), b = 3 et a = 7 (exemple donné dans l'énoncé), b = 4 et a = 8 (48 ans et 84 ans), b = 5 et a = 9 (59 ans et 95 ans).

Attribution des points

4 Réponse correcte ("oui" avant 2017 : 15-51; 26-62; "oui" après 2017 : 48-84; 59-95, avec une explication détaillée (par exemple, des essais ordonnés en âges croissants)

3 Réponse correcte (les quatre couples) avec des explications incomplètes (par ex. seulement quelques essais)
ou trois couples trouvés (à l'exclusion de celui de l'énoncé) avec des explications détaillées

2 Trois couples trouvés (à l'exclusion de celui de l'énoncé) avec des explications incomplètes
ou deux couples trouvés avec des explications détaillées
ou réponse correcte sans explications

1 Début de recherche organisée
ou trois couples trouvés sans explication

0 Incompréhension du problème

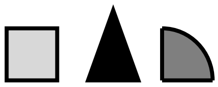
Niveaux : 6, 7, 8

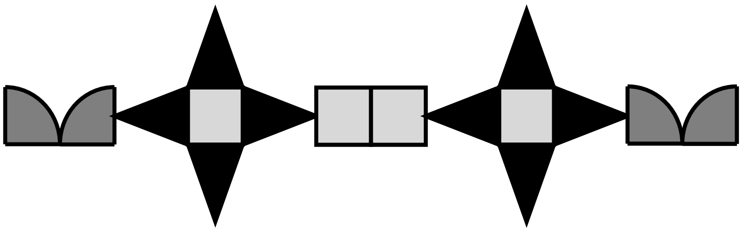
Origine : Riva del Garda (reprise des problèmes *Bougies*, 11RMT-F, cat. 5-6 ; *Anniversaires et bougies*, 16RMT-F, cat. 7-10)

10. LES BRACELETS DÉCORÉS (CAT. 6, 7, 8)

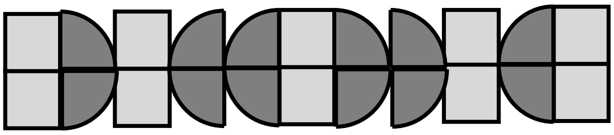
Madame Clélia crée des bracelets dans des bandes de cuir qu'elle décore avec des pièces colorées particulières.

La figure ci-dessous montre le dessin des décorations des trois bracelets qu'elle a créés hier, et pour lesquels elle a utilisé seulement des pièces comme celles-ci :

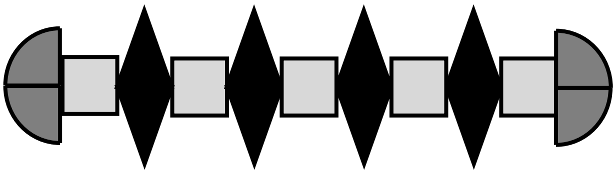




13,20 €



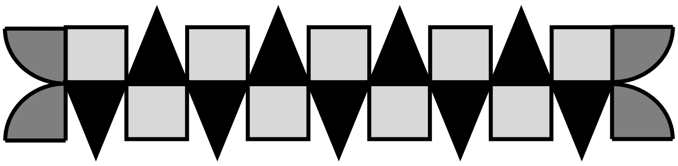
16,60 €



13,90 €

Les pièces ont des prix différents selon qu'elles ont la forme d'un carré, d'un triangle ou d'un quart de disque. Le prix de chaque décoration est indiqué à côté du dessin.

Aujourd'hui, Clélia a fabriqué un autre bracelet en utilisant les trois types de pièces. Voici le dessin du bracelet qu'elle a réalisé :



Quel est le prix de la décoration du bracelet que Clélia a réalisé aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Connaissant le prix de trois compositions différentes réalisées à l'aide de trois types d'objets ayant des prix différents l'un de l'autre, déterminer le prix d'une quatrième composition contenant les trois mêmes types d'objets.

Analyse de la tâche

- Comprendre que tous les bracelets sont réalisés avec trois types de pièces : carré, triangle et quart de disque, et donc que les losanges qu'on voit sur le troisième bracelet sont composés chacun de deux triangles isocèles accolés par leur base.
- Comprendre que chaque type de pièce a un prix différent en fonction de la forme et que le prix indiqué à côté de chaque bracelet correspond au prix total des pièces utilisées.
- Observer que le premier et le troisième bracelet comportent les trois types de pièces alors que le deuxième ne comporte pas de pièce triangulaire.

- Comprendre que pour déterminer le prix du quatrième bracelet il faut connaitre celui de chaque type de pièce.
- Déterminer pour chaque bracelet le nombre de pièces de chaque type qui a été utilisé :
  - premier bracelet : 4 quarts de cercle, 4 carrés, 8 triangles ;
  - deuxième bracelet : 12 quarts de cercle, 10 carrés ;
  - troisième bracelet : 4 quarts de cercle, 5 carrés, 8 triangles
- Constater que le troisième bracelet se distingue du premier uniquement par la présence d'une pièce carrée supplémentaire.
- En déduire que la différence de prix entre les deux bracelets correspond au prix d'une pièce carré : 0,70 euro (13,90 − 13,20).
- Déterminer ensuite le prix d'un quart de disque à partir du prix du deuxième bracelet qui n'est composé que de carrés et quarts de disque : 0 ,80 euro ([16,60 – 0,70 x 10] : 12).
- Déterminer enfin le prix d'une pièce triangulaire à partir du prix du premier ou du troisième bracelet. Par exemple à partir des informations maintenant connues sur le premier bracelet, on trouve 0,90 euro ([13,20 – 0,80 x 4 – 0,70 x 4] : 8).
- Calculer enfin le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro (0,80 x 4 – 0,70 x 9 + 0,90 x 9).

Ou Procéder par essais pour déterminer le prix de chaque type de pièce, par exemple à partir du deuxième bracelet qui n'est fait que de carrés et de quarts de disque, en nombres voisins (10 carrés et 12 quarts de disque). En faisant l'hypothèse que les deux types de pièces ont le même prix, on obtient 0,75 euro (16,60 : 22). À partir de là, ajuster les valeurs. Pour les valeurs qui conviennent pour le deuxième bracelet, vérifier qu'elles conviennent pour les premier et troisième bracelets. Finir par trouver que pour 0,70 euro pour la pièce carrée et 0,80 euro pour le quart de disque, on obtient le même prix pour la pièce triangulaire (0,90 euro) pour les premier et troisième bracelets.

- Calculer le prix du quatrième bracelet : 17,60 euro.

Attribution des points

4 Réponse correcte (17,60 €) avec des explications claires et complètes (inventaire des pièces de chaque bracelet ou comparaison directe entre le premier et le troisième bracelet, description des étapes avec le détail des calculs des valeurs des différentes pièces, essais organisés avec présence des vérifications effectuées)

3 Réponse correcte avec des explications partielles (par exemple absence de quelques étapes ou dans le cas d'une procédure par essais absence de vérifications)

ou procédure correcte bien expliquée mais avec une erreur dans le comptage des pièces ou dans l'exécution d'une opération avec les nombres décimaux

2 Réponse correcte sans explication

ou procédure correcte avec plus d'une erreur dans le comptage des pièces et/ou l'exécution des opérations avec les nombres décimaux

ou détermination correcte du nombre de pièces de chaque type dans les trois premiers bracelets et début de procédure correcte des calculs mais sans arriver à la conclusion

1 Début de raisonnement correct (par exemple, détermination exacte du nombre de pièces de chaque type dans les trois premiers bracelets)

0 Incompréhension du problème (par exemple décompte du nombre de pièces dans chaque bracelet, sans prendre en compte qu'il y a différents types de pièces, attribution de valeurs arbitraires aux pièces sans vérification …)

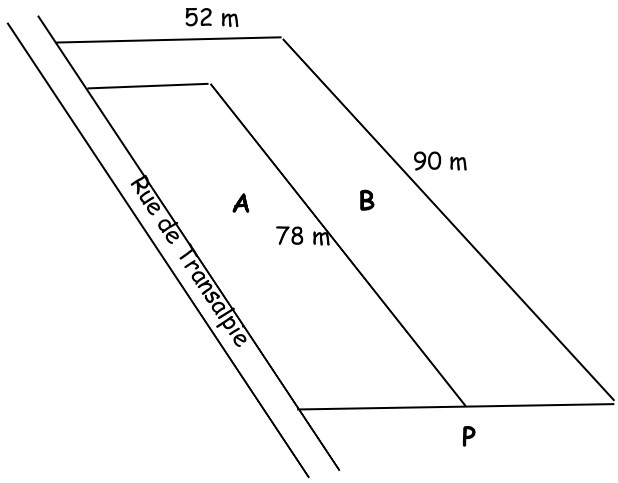
Niveaux : 6, 7, 8

Origine : GTAL (Groupe Algèbre, d'après *Pièces magnétiques*, 24.I.13)

11. PARTAGE D'UN TERRAIN (CAT. 6, 7, 8, 9)

Pierre et Marie ont acheté un terrain rectangulaire situé en bordure de la rue de Transalpie et l'ont fait partager en deux parcelles A et B de même aire.

Pour laisser le passage de la parcelle B vers la rue, le géomètre a partagé ainsi le terrain : la parcelle A est rectangulaire (de 78 m de longueur) et la parcelle B a une forme en L.



À quelle distance de la rue le géomètre a-t-il placé le poteau P pour que les deux parcelles aient la même aire ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

À partir d'une représentation en perspective de deux rectangles de longueurs données, déterminer leurs largeurs de façon à ce que l'aire du petit soit la moitié de celle du grand.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le dessin est un schéma en perspective ne permettant pas d'y faire des mesures et que la réponse devra être obtenue par un calcul, que les grands côtés des parcelles A et B sont parallèles au chemin, les petits côtés des parcelles sont perpendiculaires au chemin ; et que la distance de P au chemin est la largeur de A.
- Constater que l'aire totale se calcule facilement (rectangle de 90×52), qu'on pourra en déduire les deux parties égales, dont A, qui est un rectangle dont on connaît la longueur et l'aire et dont on pourra calculer la largeur.
- Effectuer les calculs correspondant : aire totale du terrain : $90 \times 52 = 4680$, parties A et B $4680 : 2 = 2340$ (en m^2)

  largeur de la partie A: $2340 / 78 = 30$ (en m)
- En déduire la position du poteau P à 30 m du bord de la rue de Transalpie

Ou bien,

- Décomposer par exemple la parcelle B en un rectangle de 78 m sur 52 m et un autre, pour le passage, de 52 m de 12 m.

  ($90 – 78 = 12$), dont l'aire est : $52 \times 12 = 624$ m^2. L'aire du rectangle restant est $78 \times 52 = 4056$ m^2
- En déduire que l'aire de A correspond à la moitié de ce dernier rectangle de largeur 26 et à la moitié du passage de largeur $(624 :2) : 78 = 4$ m.

Ou, par voie algébrique, exprimer l'aire de la parcelle A en fonction de sa largeur l : $78\,l$. ; celle de B en $624 + 78 \times (52 – l)$ et obtenir l'équation en l : $78\,l = 624 + 78 \times (52 – l)$ dont la solution est 30.

Attribution des points

4 Le résultat exact (à 30 m du bord de la rue ou 30 m) avec une explication complète et claire (indications des rectangles, avec leurs dimensions, les calculs de l'aire et de la largeur ou résolution algébrique)

3 Le résultat exact (à 30 m du bord de la rue ou 30 m) avec des explications peu claires ou incomplètes (ou certaines opérations manquent ; ou seulement une vérification de l'égalité des aires de A et de B sans indiquer comment les dimensions ont été trouvées)

ou réponse « 30 mètres de largeur pour la parcelle A », sans référence à la rue, avec explications détaillées

2 Le résultat exact (à 30 m du bord de la rue ou 30 m) sans explication.

1 Début de recherche, par exemple avec seulement le calcul de l'aire des deux parties

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : F-C

12. À LA PARFUMERIE (CAT. 7, 8, 9)

Sophie entre dans une parfumerie acheter son parfum préféré.

Sur une étagère, elle voit deux flacons :

- un de 50 ml au prix de 59 €
- et l'autre de 125 ml au prix de 129 €.

Sur l'étiquette du premier, il est écrit : « *en promo : – 20 % sur le prix affiché* ».

Sur l'étiquette du deuxième : « *offre spéciale : – 10 % sur le prix affiché* ».

Elle décide alors de choisir le flacon qui lui permettra d'obtenir son parfum préféré au prix le plus intéressant au ml.

Quel flacon devra-t-elle choisir : 50 ml ou 125 ml ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Comparer le prix d'un même liquide vendu dans deux flacons de volumes et de prix différents avec deux réductions différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les deux flacons ont une capacité différente, et que le prix proposé dépend de la quantité de parfum que chaque bouteille contient.
- Comprendre que la comparaison doit être faite sur le prix d'une même unité de capacité : 1 ml ou 25 ml.
- Comprendre que les prix indiqués sont à réduire et qu'il faut faire les calculs des nouveaux prix avant la comparaison :

  20% de 59 = 11,8 ; le prix réduit du premier flacon est donc 59 – 11,8 = 47,2 €

  et 10% de 129 = 12,9 ; le prix réduit du deuxième flacon est donc 129 – 12,9 = 116,1 €.
- Pour calculer le prix unitaire on doit choisir l'unité de capacité. La plus pratique pour les calculs est 1 ml, mais la comparaison doit alors être faite sur les centimes d'euros : 47,2 : 50 = 0,944 et 116,1 : 125 = 0,92880,929
- La capacité qui permet de mieux voir la différence est 25ml. On peut comparer le prix de 25 ml de parfum, qui dans le premier cas est 23,60 € (47,2 : 2) alors que dans le second il est 23,22 € (116,1 : 5).
- On peut aussi voir la différence en prenant 1 litre. On peut procéder en multipliant par 1000 les deux prix : 0,944 × 1000 = 944 et 0,9288 × 1000 = 928,8 ou en appliquant un calcul de proportionnalité :

  47,2 × 20 = 944 et 116,1 × 8 = 928,8.
- On peut aussi choisir une capacité qui soit multiple de 50 ml et 125 ml soit 250 ml.

  On compare alors le prix de 5 petits flacons, c'est-à-dire 5 × 59 × 0,8 = 236 € et de 2 grands flacons, c'est-à-dire : 2 × 129 × 0,9 = 232,2 €.

Attribution des points

4 Réponse correcte (le flacon ayant le prix le plus intéressant est celui de 125 ml) avec des explications claires et des calculs détaillés

3 Réponse correcte avec des explications peu claires des calculs effectués

2 Réponse "de coût égal" pour avoir trop arrondi le prix d'un ml

ou bien réponse erronée à cause d'erreurs de calcul, mais avec un raisonnement correct

1 Réponse avec un raisonnement cohérent avec les prix affichés, mais sans les remises

0 Incompréhension du problème ou réponse correcte sans aucune explication

Niveaux : 7, 8, 9

Origine : Lodi et fj

13. POLYGONES (CAT. 7, 8, 9, 10)

Le professeur Hypoténuse a demandé à chacun de ses 24 élèves de dessiner et découper trois polygones choisis parmi des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones.

Le professeur recueille et observe toutes les figures et note que :

- il y a en tout 300 côtés,
- il y a autant d'hexagones que de quadrilatères,
- pour chaque pentagone il y a 5 triangles.

Combien y a-t-il de triangles, de quadrilatères, de pentagones et d'hexagones ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Trouver, dans un ensemble de 72 triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones présentant 300 côtés en tout, le nombre de chacun de ces polygones sachant qu'il y a autant de quadrilatères que d'hexagones, que le nombre des triangles est le quintuple de celui des pentagones

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on est en présence de 72 polygones (24·3) dont on fait l'inventaire des côtés (300) et des relations entre les nombres des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones et que la demande est de déterminer chacun de ces nombres
- Procéder par essais organisés en vérifiant les contraintes. Par exemple : s'il y avait 1 pentagone, il y aurait 5 triangles, et 33 quadrilatères et hexagones $(72 - 6) \div 2 = 33$; ce qui donnerait 350 côtés : $1 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 33 \cdot 6 + 33 \cdot 4 = 350$, ce qui ne correspond pas aux données, ...
- Poursuivre en augmentant le nombres des pentagones pour trouver la solution : 6 pentagones, 30 triangles, 18 quadrilatères et hexagones, $(72 - 36) \div 2 = 18$, et le nombre des côtés : $6 \cdot 5 + 30 \cdot 3 + 18 \cdot 6 + 18 \cdot 4 = 300$

  Le même genre de procédure est évidemment possible en organisant les essais à partir du nombre des autres polygones que les pentagones ou en tenant compte du nombre total de côtés (300) pour vérifier que le nombre de polygones est bien 72.

Ou : Observer que dans un groupe de 1 pentagone et 5 triangles il y a 20 côtés et que dans un groupe de 1 quadrilatère et 1 hexagone il y a 10 côtés, ce qui fait 30 côtés en tout. S'il y avait 10 groupes d'un type et 10 groupes de l'autre on aurait bien 300 côtés mais 80 figures. Constater alors qu'avec 9 groupes du premier type, on aurait 20 côtés de moins qui devraient être récupérés par deux groupes du second type ; on aurait alors 12 quadrilatères et 12 hexagones, avec un nombre total de 78 polygones : $9 + 45 + 12 + 12 = 78$. Essayer encore avec 8, 7 et 6 et vérifier que dans ce cas il y aurait 72 figures et 300 côtés.

Ou : Poser un systèmes d'équation, par exemple avec a : nombre de pentagones et b : nombre d'hexagones et quadrilatères

$$\begin{cases} 5a + 5 \times 3a + 6b + 4b = 300 \rightarrow 20a + 10b = 300 \rightarrow 2a + b = 30 \\ a + 5a + b + b = 72 \rightarrow 6a + 2b = 72 \rightarrow 3a + b = 36 \end{cases}$$

dont la solution a = 6 et b = 18 , c'est à dire 30 triangles, 18 quadrilatères, 6 pentagones et 18 hexagones

Attribution des points

4 Réponse correcte : 30 triangles, 18 quadrilatères, 6 pentagones et 18 hexagones avec explications qui font comprendre clairement la procédure suivie (72 polygones, équations ou au moins trois essais, dont la solution)

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes ou seulement une vérification de la solution

2 Réponse correcte sans explication

1 Réponse erronée : on a tenu compte seulement des 300 côtés (par exemple : 1 pentagone, 5 triangles, 28 quadrilatères et 28 hexagones) ou seulement du nombre total des figures (par exemple : 3 pentagones 15 triangles, 27 quadrilatères et 27 hexagones)

0 Incompréhension du problème ou seulement le nombre total des figures

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Udine

14. LE TAPIS ROULANT (CAT. 8, 9, 10)

À Paris, il y a une station de métro dans laquelle un couloir mesure 250 mètres.

Pour faciliter le passage, on a installé un tapis roulant sur toute sa longueur.

Ce tapis roulant avance à une vitesse de 3 km à l'heure.

Michèle, qui est frigorifiée, prend le tapis roulant en continuant à marcher à sa vitesse habituelle. Elle traverse ainsi le couloir en seulement deux minutes.

Quelle est la vitesse à laquelle Michèle marche habituellement ?

Expliquez comment vous l'avez trouvée.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

- Calculer la vitesse d'une personne marchant sur un tapis roulant en mouvement, sur une distance et en un temps donnés.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour traverser le couloir, Michèle doit marcher moins longtemps sur le tapis roulant que si elle était restée immobile, parce que sa vitesse s'ajoute à celle du tapis roulant.
- Calculer le temps nécessaire pour traverser le couloir en restant immobile sur le tapis roulant : 250 : 3 000 = 1/12 d'heure, soit 5 minutes.
- Calculer la vitesse à laquelle Michèle a traversé le couloir : 250 : (1/30) = 7 500m/h soit 7,5 km/h et en déduire que sa vitesse habituelle de marche est de 4,5 km/h (7,5 - 3).

Ou

- Calculer la vitesse à laquelle Michèle a traversé le couloir sur le tapis roulant, en mètres par minute : 250 / 2 = 125 mètres par minute, soit 7 500 mètres à l'heure (125 x 60). En déduire que la vitesse à laquelle Michèle marche habituellement est de 4,5 km/h (7,5 - 3).

Attribution des points

4 Réponse correcte (4,5 km/h) avec explications claires et complètes.

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes.

2 Réponse correcte sans explication ou réponse erronée à cause d'une erreur de calcul mais avec un raisonnement correct.

1 Début de recherche correct.

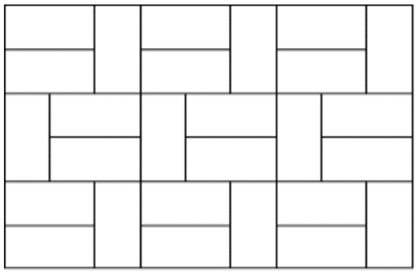
0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Franche-Comté

15. LE DALLAGE DE FABIO (CAT. 8, 9, 10)

Voici le dessin du dallage de la chambre de Fabio composé de dalles rectangulaires toutes égales.



Le périmètre de la chambre est de 15 m. Le prix des dalles est de 30 euros au m2.

Combien Fabio a-t-il dépensé pour acheter les dalles de sa chambre?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

À partir du dessin d'un pavage rectangulaire de 15 mètres de périmètre composé de dalles rectangulaires égales dont on connaît le prix au mètre carré, calculer le prix des dalles.

Analyse de la tâche

- De la lecture de l'énoncé, comprendre qu'il est nécessaire de calculer l'aire du pavage (rectangle) pour pouvoir répondre à la demande du prix.
- Observer la figure et en percevoir les régularités, tant horizontalement que verticalement.
- Voir (de la juxtaposition des rectangles) que la longueur des dalles est le double de la largeur et qu'il s'agit de la « relation clé » de la situation qui permet de définir une unité commune pour la mesure des côtés.

  Par exemple, en prenant la largeur d'une dalle comme unité ou en imaginant une trame quadrillée du dallage, chaque dalle occupe 2 carrés du quadrillage et les dimensions de la chambre sont 9 et 6, le périmètre 30, en côtés des carrés unités.
- Par proportionnalité, trouver les mesures en mètres : 30 (côtés de carrés) ⇔ 15 (m) détermine le rapport 15/30 = 1/2 et les dimensions de la chambre 4,5 et 3 (en m).
- Passer alors à l'aire de la chambre : 3 × 4,5 = 13,5 (en m^2) et au prix des dalles : 13,5 × 30 = 405 (en euro).

Ou, par une procédure algébrique, exprimer les dimensions par des lettres (par exemple x et y pour la largeur et la longueur d'une dalle pour arriver aux équations successives $2(9x + 6x) = 15$; $30x = 15$; $x = 1/2$; puis, comme précédemment, déterminer les dimensions du dallage, calculer son aire et son prix.

Attribution des points

4 Réponse correcte (405 euros) avec explications claires et complètes (rapport 1 à 2 entre les dimensions, indication des unités, ou quadrillage dont l'unité est la largeur d'une dalle, dimensions, aire, prix)

3 Réponse correcte avec explications partielles (exemple : seulement la succession des calculs)

ou une seule erreur de calcul dans la détermination des dimensions des dalles qui conduit à une réponse erronée mais cohérente, avec explications.

2 Réponse correcte sans explications

ou les dimensions du dallage sont calculées correctement, mais sans le prix

1 Début de recherche (par exemple, le rapport 2 entre les dimensions des dalles est mentionné)

ou choix des dimensions ne correspondant pas à la figure avec toutefois un périmètre de 15 et un calcul d'aire et de prix cohérents

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : GTGP d'après 23.I.14 Le parquet (SI)

16. CINÉMA EN JEU (CAT. 9, 10)

Marie dispose de huit cartes : cinq portent un numéro et trois une lettre.

Elle pose les cartes à l'envers sur la table et appelle son ami Raoul.

Marie propose à Raoul de choisir deux cartes au hasard et lui promet de lui offrir un billet de cinéma s'il y aura au moins une lettre sur l'une des deux cartes qu'il choisira. Sinon, c'est Raoul qui devra offrir à Marie un billet de cinéma.

Quel est le nombre de possibilités pour chaque enfant de se faire offrir une place de cinéma ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE *A PRIORI*

Tâche mathématique

Déterminer les possibilités que deux événements complémentaires se réalisent : voir apparaître – ou non – une lettre sur un tirage de deux objets parmi huit : 5 nombres et 3 lettres.

Analyse de la tâche

- Dresser la liste de tous les tirages différents de 2 cartes par différents moyens : écriture des couples, utilisation d'un arbre, d'un tableau à double entrée… Il y en a 28 sans tenir compte de l'ordre (ou 56 avec ordre) et compter les tirages qui comportent au moins une carte avec une lettre : il y en a 18 (ou 36 avec ordre).

Ou

- Démarche utilisant la combinatoire :
  Nombre total de tirages, sans tenir compte de l'ordre : 8 possibilités pour la première carte et 7 pour la seconde, mais un même tirage est comptabilisé deux fois selon que la même carte est tirée en premier ou en second, ce qui fait $(8 \times 7) / 2 = 28$.
  Nombre de tirages sans lettre : même raisonnement, ce qui donne $(5 \times 4) / 2 = 10$. Nombre de tirages comportant au moins une lettre : $28 – 10 = 18$.
  Il est aussi possible de déterminer le nombre de tirages avec au moins une lettre : exactement une lettre 3×5 plus 3 cas avec 2 lettres.
- Conclure que Raoul a plus de chance de se faire offrir son entrée au cinéma car 18 tirages sur 28 (ou 36 sur 56) est plus grand que les chances de Marie, 10 tirages sur 28 (ou 20 sur 56).

Réponse erronée possible :

En faisant appel à la « logique commune » : « Il y a moins de cartes avec une lettre, donc j'ai donc plus de chances de tirer deux cartes sans lettre et donc moins de chances d'avoir une carte avec une lettre quand je tire deux cartes ».

Attribution des points

4 Réponse correcte (Raoul a 18 possibilités et Marie 10 possibilités) ou réponses sous forme décimale, fractionnaire ou 18 sur 28 et 10 sur 28, avec des explications claires et complètes (cf. l'analyse a priori)

3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires, mais correctes

ou seulement le nombre de possibilités exact pour un seul des enfants (absence de l'autre ou erreur de calcul), avec des explications claires et complètes

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse cohérente avec un raisonnement correct avec au plus 5 tirages manquants sans tenir compte de l'ordre (10 en tenant compte l'ordre)

ou réponse correcte avec explication erronée, mais avec au moins un dénombrement correct parmi 28, 18 ou 10 (ou 56, 36 ou 10).

1 Réponse correcte avec une explication erronée non mentionnée pour 2 points

ou début de raisonnement avec au moins un des trois types de tirages possibles mais sans aboutir à une conclusion

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Suisse Romande

17. QUADRILLAGE (CAT. 9, 10)

« Aujourd'hui, je vous propose une recherche en géométrie », dit le professeur en entrant dans la classe.

« J'ai préparé pour chacun de vous une feuille rectangulaire de 36 cm sur 27 cm exactement.

Vous allez la quadriller en respectant les deux règles suivantes :

- tous les carrés obtenus doivent être identiques et occuper toute la feuille,
- les côtés de vos carrés doivent mesurer au moins 1 cm.

Lorsque vous aurez terminé votre dessin, vous me direz en combien de carrés vous avez partagé votre feuille. »

Après avoir dessiné précisément de nombreux segments en s'aidant de leurs règles et de leurs équerres, voici les réponses que donnent quelques élèves :

- Françoise : « J'ai partagé ma feuille entière en 27 carrés identiques. »
- Gertrude : « J'ai partagé ma feuille entière en 48 carrés identiques. »
- Henri : « J'ai partagé ma feuille entière en 972 carrés identiques et votre problème a 9 solutions. »
- Isidore : « J'ai partagé ma feuille entière en 588 carrés identiques. »

Que pensez-vous de chacune de ces réponses ?

Lesquelles le professeur va-t-il pouvoir accepter ? Pourquoi ?

ANALYSE *A PRIORI*

Domaine de connaissances

- Arithmétique : multiplication, division, racine carrée, proportionnalité, multiples communs
- Géométrie : aire du rectangle et pavage

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que la mesure de l'aire du rectangle est 36 x 27 = 972 (en cm^2), et qu'on peut ainsi calculer dans les quatre cas l'aire d'un carré :
  F) 972 : 27 = 36 ; G) 972 : 48 = 20,25 ; H) 972 : 972 = 1 ; I) 972 : 588 = 81/49 ≈ 1,653...
- Se rendre compte qu'il ne suffit pas d'avoir calculé l'aire d'un carré pour juger de la validité de la réponse, mais qu'il faut se demander encore si la longueur du côté est supérieure ou égale à 1 ; ce qui est le cas pour les quatre élèves, F) 6 ; G) 4,5 ; H) 1 et I) 9/7 (le calcul de cette dernière racine carrée peut poser des problèmes à ceux qui ignorent l'existence des nombres rationnels).
- Se rendre compte finalement qu'il faut encore vérifier, dans le cadre géométrique, si on peut placer un nombre entier de carrés sur la longueur et la largeur de la feuille. Pour F, ce n'est pas possible (36 : 6 = 6 mais 27 : 6 = 4,5 n'est pas entier) ; pour G on obtient 36 : 4,5 = 8 et 27 : 4,5 = 6 ce qui correspond bien à 48 carrés ; pour H c'est évidemment possible ; pour I, il faut de nouveau travailler avec des nombres rationnels et non avec des approximations décimales pour se rendre compte que 36/(9/7) = 28 et 27/(9/7) = 21 ce qui donne bien 588 (28 x 21) carrés.
- Il ne reste alors plus qu'à vérifier les affirmations de H qui dit qu'il a obtenu 972 carrés et que le problème a 9 solutions. La première affirmation est vraie. La seconde affirmation est vraie aussi : à partir des 12 carrés les plus grands possible (de côté 9), on peut procéder systématiquement en partageant chacun d'eux en 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 et 81 carrés, pour obtenir les 9 possibilités pour les nombres totaux de carrés : 12, 48, 108, 196, 300, 432, 588, 768 et 972. (On peut aussi présenter cet inventaire au moyen d'un tableau).
- Finalement, le professeur peut accepter les réponses de G, H et I, et réfuter celle de F.

Attribution des points

4 Réponse entièrement correcte, (G, H et I mais pas F) avec justification pour les quatre cas : vérification que les côtés contiennent un nombre entier de carrés et indication des 9 solutions pour H

3 Réponse entièrement correcte mais les justifications sont incomplètes

2 Une erreur dans les réponses, justification des trois autres cas

1 Deux erreurs dans les réponses

0 Plus de deux erreurs ou incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Adaptation du problème *Carrelages* (10.I.13)